練習問題解答 (カルノー図)

山本昌志*

2003 年 10 月 27 日

1 練習問題解答

1.1 標準展開

1.1.1 主加法標準展開

主加法標準展開すると、以下のようになる。

(1) $A \cdot C + \bar{B} \cdot C = A \cdot (B + \bar{B}) \cdot C + (A + \bar{A}) \cdot \bar{B} \cdot C$
$= A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$
$= A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$

(2) $A + \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C = A \cdot (B + \bar{B}) \cdot (C + \bar{C}) + (A + \bar{A}) \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$
$= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$
$= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$

(3) $A + B \cdot C = A \cdot (B + \bar{B}) \cdot (C + \bar{C}) + (A + \bar{A}) \cdot B \cdot C$
$= A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$
$= A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C$

(4) $A + B = A \cdot (B + \bar{B}) + (A + \bar{A}) \cdot B$
$= A \cdot B + A \cdot \bar{B} + A \cdot B + \bar{A} \cdot B$
$= A \cdot B + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

(5) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
$= A \cdot B \cdot (C + \bar{C}) + A \cdot (B + \bar{B}) \cdot C$
$= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C$
$= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C$

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

(6) $A \cdot (\overline{B+C}) = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$

(7) $A + B \cdot C =$ (3) と同じ

(8) $\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

(9) $$\begin{aligned}(A+B)\cdot(B+C) &= A\cdot B + A\cdot C + B\cdot B + B\cdot C \\ &= A\cdot B + A\cdot C + B + B\cdot C \\ &= (A+1+C)\cdot B + A\cdot C \\ &= B + A\cdot C \\ &= (A+\bar{A})\cdot B\cdot(C+\bar{C}) + A\cdot(B+\bar{B})\cdot C \\ &= A\cdot B\cdot C + A\cdot B\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot B\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C} + A\cdot B\cdot C + A\cdot\bar{B}\cdot C \\ &= A\cdot B\cdot C + A\cdot B\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot B\cdot C + \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C} + A\cdot\bar{B}\cdot C\end{aligned}$$

(10) $$\begin{aligned}\bar{A}\cdot\bar{B} + \bar{B}\cdot\bar{C} &= \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot(C+\bar{C}) + (A+\bar{A})\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} \\ &= \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} + A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} \\ &= \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} + A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\end{aligned}$$

1.1.2 主乗法標準展開

主乗法標準展開すると以下のようになる。

(1) $$\begin{aligned}A\cdot C + \bar{B}\cdot C &= (A+\bar{B})\cdot C \\ &= (A+\bar{B}+C\cdot\bar{C})\cdot(B\cdot\bar{B}+C) \\ &= (A+\bar{B}+C)\cdot(A+\bar{B}+\bar{C})\cdot(B+C)\cdot(\bar{B}+C) \\ &= (A+\bar{B}+C)\cdot(A+\bar{B}+\bar{C})\cdot(A\cdot\bar{A}+B+C)\cdot(A\cdot\bar{A}+\bar{B}+C) \\ &= (A+\bar{B}+C)\cdot(A+\bar{B}+\bar{C})\cdot(A+B+C)\cdot(\bar{A}+B+C)\cdot(A+\bar{B}+C)\cdot(\bar{A}+\bar{B}+C) \\ &= (A+\bar{B}+C)\cdot(A+\bar{B}+\bar{C})\cdot(A+B+C)\cdot(\bar{A}+B+C)\cdot(\bar{A}+\bar{B}+C)\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}A+\bar{B}\cdot C+\bar{A}\cdot B\cdot C &= (A+\bar{B})\cdot(A+C)+\bar{A}\cdot B\cdot C \\ &= (A+\bar{B}+\bar{A}\cdot B\cdot C)\cdot(A+C+\bar{A}\cdot B\cdot C) \\ &= (A+\bar{B}+\bar{A}\cdot B)\cdot(A+\bar{B}+C)\cdot(A+C+\bar{A})\cdot(A+C+B\cdot C) \\ &= (A+\bar{B}+\bar{A})\cdot(A+\bar{B}+B)\cdot(A+\bar{B}+C)\cdot 1\cdot(A+C+B)\cdot(A+C+C) \\ &= 1\cdot 1\cdot(A+\bar{B}+C)\cdot(A+B+C)\cdot(A+C) \\ &= (A+\bar{B}+C)\cdot(A+B+C)\cdot(A+C+\bar{B}\cdot B) \\ &= (A+\bar{B}+C)\cdot(A+B+C)\cdot(A+C+\bar{B})\cdot(A+C+B) \\ &= (A+\bar{B}+C)\cdot(A+B+C)\end{aligned}$$

(3) $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

$= (A + B + C \cdot \bar{C}) \cdot (A + C + B \cdot \bar{B})$

$= (A + B + C) \cdot (A + B + \bar{C}) \cdot (A + C + B) \cdot (A + C + \bar{B})$

$= (A + B + C) \cdot (A + B + \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + C)$

(4) $(A + B) \cdot (B + C) = (A + B + C \cdot \bar{C}) \cdot (B + C + A \cdot \bar{A})$

$= (A + B + C) \cdot (A + B + \bar{C}) \cdot (B + C + A) \cdot (B + C + \bar{A})$

$= (A + B + C) \cdot (A + B + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + B + C)$

(5) $A \cdot (B + C) = (A + B \cdot \bar{B}) \cdot (B + C + A \cdot \bar{A})$

$= (A + B) \cdot (A + \bar{B}) \cdot (B + C + A) \cdot (B + C + \bar{A})$

$= (A + B + C \cdot \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + C \cdot \bar{C}) \cdot (A + B + C) \cdot (\bar{A} + B + C)$

$= (A + B + C) \cdot (A + B + \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (A + B + C) \cdot (\bar{A} + B + C)$

$= (A + B + C) \cdot (A + B + \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + B + C)$

(6) $A \cdot (\overline{B + C}) = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$

$= (A + B \cdot \bar{B}) \cdot (A \cdot \bar{A} + \bar{B}) \cdot (A \cdot \bar{A} + \bar{C})$

$= (A + B) \cdot (A + \bar{B}) \cdot (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + \bar{B}) \cdot (A + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{C})$

$= (A + B + C \cdot \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + C \cdot \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C \cdot \bar{C}) \cdot (A + \bar{C} + B \cdot \bar{B}) \cdot (\bar{A} + \bar{C} + B \cdot \bar{B})$

$= (A + B + C) \cdot (A + B + \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$

$\cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (A + B + \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + B + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$

$= (A + B + C) \cdot (A + B + \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$

$\cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + B + \bar{C})$

(7) $A + B \cdot C + C = A + (B + 1) \cdot C$

$= A + C$

$= A + C + B \cdot \bar{B}$

$= (A + C + B) \cdot (A + C + \bar{B})$ これで OK であるが、少し整理する

$= (A + B + C) \cdot (A + \bar{B} + C)$

(8) $\overline{A + B} + B = \bar{A} \cdot \bar{B} + B$

$= (\bar{A} + B) \cdot (\bar{B} + B)$

$= (\bar{A} + B) \cdot 1$

$= \bar{A} + B$

(9) $(A+B)\cdot(B+C)=$ (4) と同じ

(10) $\bar{A}\cdot\bar{B}+\bar{B}\cdot\bar{C}=\bar{B}\cdot(\bar{A}+\bar{C})$

$$
\begin{aligned}
&=(A\cdot\bar{A}+\bar{B})\cdot(\bar{A}+\bar{C}+B\cdot\bar{B})\\
&=(A+\bar{B})\cdot(\bar{A}+\bar{B})\cdot(\bar{A}+\bar{C}+B)\cdot(\bar{A}+\bar{C}+\bar{B})\\
&=(A+\bar{B}+C\cdot\bar{C})\cdot(\bar{A}+\bar{B}+C\cdot\bar{C})\cdot(\bar{A}+B+\bar{C})\cdot(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})\\
&=(A+\bar{B}+C)\cdot(A+\bar{B}+\bar{C})\cdot(\bar{A}+\bar{B}+C)\cdot(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})\cdot(\bar{A}+B+\bar{C})\cdot(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})\\
&=(A+\bar{B}+C)\cdot(A+\bar{B}+\bar{C})\cdot(\bar{A}+\bar{B}+C)\cdot(\bar{A}+B+\bar{C})\cdot(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})
\end{aligned}
$$

1.2 カルノー図

カルノー図を用いて、以下の論理式を簡単化する。ここに示されている全ての問題の各項は、論理変数の重複が無い。そのため、カルノー図に 1 を書き込むべきところは直ちに分かる。

(1) $A\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot B\cdot C+\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C+\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$

(図 1 から)

$=A\cdot B+B\cdot C+\bar{A}\cdot\bar{B}$

(2) $A\cdot B\cdot C+A\cdot\bar{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\bar{C}+A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$

(図 2 から)

$=A+\bar{B}\cdot\bar{C}$

(3) $A\cdot B\cdot D+A\cdot\bar{B}\cdot\bar{D}+A\cdot C\cdot D+A\cdot\bar{C}\cdot D$

(図 3 から)

$=A\cdot\bar{B}+A\cdot D$

(4) $A\cdot B\cdot C\cdot D+A\cdot\bar{B}\cdot D+\bar{A}\cdot B\cdot D+\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D}+B\cdot\bar{C}\cdot D$

(図 4 から)

$=\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D}+B\cdot D+A\cdot D$

(5) $\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}+B\cdot\bar{C}\cdot D+A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D+A\cdot C\cdot D+B\cdot C\cdot D$

(図 5 から)

$=B\cdot D+\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}+A\cdot C\cdot D$

(6) $A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}+\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}+A\cdot\bar{B}\cdot D+\bar{A}\cdot C+\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}+A\cdot B\cdot C\cdot D$

(図 6 から)

$=\bar{B}\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot\bar{D}+C\cdot D$

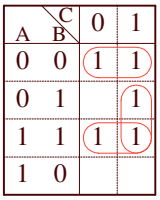

図 1: (1) のカルノー図

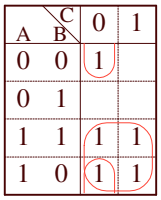

図 2: (2) のカルノー図

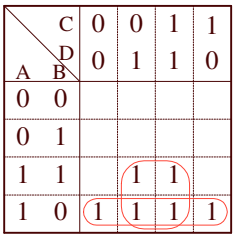

図 3: (3) のカルノー図

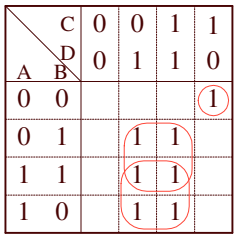

図 4: (4) のカルノー図

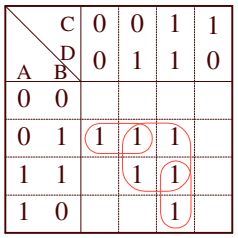

図 5: (5) のカルノー図

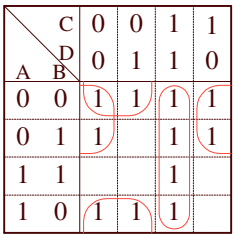

図 6: (6) のカルノー図