論理式の簡略化(カルノー図)

山本昌志*

2003年10月17日

1 はじめに

コンピューターの動作の論理はブール代数で記述が出来ます。そのブール代数については、ある程度学習して練習を積んできたと思います。そのとき、入力と出力の関係を表す真理値表というものも学習しました。この真理値表が論理回路 (デジタル回路) の入出力と同じです。先週の授業では、どんな真理値表でもそれを論理式で表すことが出来ることを学習しました。「主加法標準形」と「主乗法標準形」で、真理値表から論理式を導きました。

ここまでで、一通りの学習は完了しています。今週と来週の授業では、論理式を使う上でのテクニックを学習します。カルノー図法 (Karnaugh diagram) とクワイン-マクラスキー法 (Quine-McCluskey) といわれる方法で論理式を簡単にします。

2 主加法標準展開と主乗法標準展開

カルノー図の説明に入る前に、先週の続きで主加法標準展開と主乗法標準展開について説明しておきます。これは、簡単なので、さらっと説明します。

2.1 主加法標準展開

ある論理式を最小項の和で表すことを、主加法標準展開といいます。最小項というのは、全ての論理変数を含み、全てを掛け合わせて1つの項としたものです (先週の復習)。例えば、論理変数が (A, B, C) と3つある場合、$A \cdot B \cdot C$ や $\bar{A} \cdot B \cdot C$ 等です。論理変数の数を N とした場合、2^N 個の最小項があります。

論理式を主加法標準展開する場合、ブール代数の次の関係式を利用します。

$$A = A \cdot (B + \bar{B}) \tag{1}$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

例えば、次の論理式は、

$$
\begin{aligned}
A \cdot B + B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} &= A \cdot B \cdot (C + \bar{C}) + (A + \bar{A}) \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot (B + \bar{B}) \cdot \bar{C} + (A + \bar{A}) \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \\
&= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C \\
&\quad + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \\
&= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C \\
&\quad + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}
\end{aligned} \tag{2}
$$

のように主加法標準展開できます。簡単でしょう。主加法標準形で表すと、論理式の値が 1 になる論理変数の組み合わせが、直ちに分かるので便利です。いずれかの最小項の値が 1 になるとき、論理式の値が 1 になります。

後は各自、練習問題で感触をつかんでください。

2.2 主乗法標準展開

ある論理式を最大項の積で表すことを、主乗法標準展開といいます。最大項というのは、全ての論理変数を含み、全てを足し合わせものです。したがって、最大項の項数は論理変数の数に等しくなります (先週の復習)。例えば、論理変数が (A, B, C) と 3 つある場合、$A + B + C$ や $\bar{A} + B + C$ 等です。論理変数の数を N とした場合、2^N 個の最小項があります。

論理式を主乗法標準展開する場合、ブール代数の次の 2 つの関係式を利用します。

$$
A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C) \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
A + B &= A + B + C \cdot \bar{C} \\
&= (A + B + C) \cdot (A + B + \bar{C})
\end{aligned} \tag{4}
$$

例えば、次の論理式は、

$$
\begin{aligned}
A \cdot C + \bar{B} \cdot C &= (A + \bar{B}) \cdot C \\
&= (A + \bar{B} + C \cdot \bar{C}) \cdot (B \cdot \bar{B} + C) \\
&= (A + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (B + C) \cdot (\bar{B} + C) \\
&= (A + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (A \cdot \bar{A} + B + C) \cdot (A \cdot \bar{A} + \bar{B} + C) \\
&= (A + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (A + B + C) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C) \\
&= (A + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (A + B + C) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)
\end{aligned} \tag{5}
$$

と主乗法標準展開できます。これも、単純作業の繰り返しで簡単でしょう。主乗法標準形で表すと、論理式の値が 0 になる論理変数の組み合わせが、直ちに分かるので便利です。いずれかの最大項の値が 0 になるとき、論理式の値が 0 になります。

後は各自、練習問題で感触をつかんでください。

3　カルノー図

3.1　論理式の簡単化について

論理式を簡単化することは非常に重要です。以前学習したように論理式を簡単化することにより、スイッチの回路は動作を変えることなく部品点数を減らすことができました。実際のデジタル回路は、スイッチではなくここが半導体に変わりますが、基本は同じです。この素子 (スイッチや半導体) の削減は、実際の回路では非常にメリットがあります。まず、製造コストが安くなります。さらに部品点数が減少することで、信頼性が上がります。まだ、メリットはあると思います。ようするに技術者は、要求通り動作するだけだけでなく、より単純化したものを設計しなくてはなりません。ということで、論理式の簡単化は重要になります。頭を使うだけで、製造コストが下がることは非常に良いことです。

今まででは、ブール代数の公理や定理を使って論理式を簡単化してきましたが、論理変数が多くなると、その作業は大変になります。そこで、論理変数が多くなった場合のテクニックをここで学習します。学習する内容は、カルノー図法とクワイン-マクラスキー法と呼ばれる方法です。

3 変数くらいまではブール代数の公理や定理により簡単化はできます。3〜5 変数くらいになるとカルノー図法が有利になってきます。それ以上になると、クワイン-マクラスキー法が使われます。

3.2　論理式の簡単化

3.2.1　カルノー図の例 1

カルノー図法は、表を使って $A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} = A \cdot B$ や $A \cdot B \cdot C + A \cdot B = A \cdot B$ を見つけ出して、論理式の簡単化する方法です。

なにはともあれ、カルノー図法というもので、論理式を簡単化して見ましょう。簡単化する論理式は、

$$Z = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + B \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + A \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot D \tag{6}$$

です。これを簡単化するために、カルノー図のための表をまず作成します。論理変数が (A, B, C, D) と 4 個なので、それらの値の組み合わせは $2^4 = 16$ 個あります。この組み合わせを表す表として、図 1 の表を作成します。

A B ＼ C D	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

図 1: カルノー図を作成するための表 (4 変数)。

この表の縦および横は、それぞれの論理変数の値を示しています。これまで学習してきた真理値表と論理変数の並びが異なることに注意してください。今までの真理値表は、2 進数で値の小さい順に並んでいまし

た。しかし、カルノー図は、グレイコードで並んでいます[1]。この表は特殊で、上の端のセルと下の端のセル、右端のセルと左端のセルは連続していると考えます。グレイコードの場合、そのビットで表せる最大の数と最小の数は 1 ビットしか異なっていなかったことを思い出してください。

表の枠が出来たならば、その中に論理変数に応じた論理式の値を入れていきます。式 (6) は簡単なので、主加法標準展開しなくても、論理式の値は分かります。右辺は、5 個の項から出来ています。その 5 個の項のうち、どれかが 1 になった場合、論理式の値が 1 になります。論理式が 1 になる論理変数 (A, B, C, D) の値を探します。今後、論理変数の値はこの並びとします。

右辺第 1 項の値が 1 になるのは、$(0, 1, 0, 0)$ の場合のみです。そこで、それに対応するセルに 1 を書き込みます。図 2 の 2 行 1 列に 1 を書き込みます。右辺第 2 項の場合、A の項が無いのでそれは 0 でも 1 でも良く、$(0, 1, 0, 1)$ と $(1, 1, 0, 1)$ のとき論理式の値が 1 になります。これも、表に 1 を書き込みます。同様に右辺第 3 項は $(1, 0, 1, 1)$、第 4 項は $(1, 0, 1, 1)$ と $(1, 1, 1, 1)$、第 5 項は $(0, 1, 1, 1)$ と $(1, 1, 1, 1)$ のとき論理式の値が 1 となります。それぞれ 1 を書き込みます。

次に、この表の中の全ての 1 を出来るだけ数の少ない正方形を含む長方形 (ループ) で囲みます。ただし、囲む場合、次の約束があります。

- 囲んだ長方形の中のセルは、全て 1 であること。
- 囲んだ長方形の中のセルの数は、$1, 2, 4, , 8, \cdots$ のように 2^N であること。
- 同じセルを 2 つ以上のループで共有しても良い。
- カルノー図の上下の端、および左右の端は連続していると考える。

囲んだ結果を、図 2 に示します。3 個のループで、囲まれたことになります。

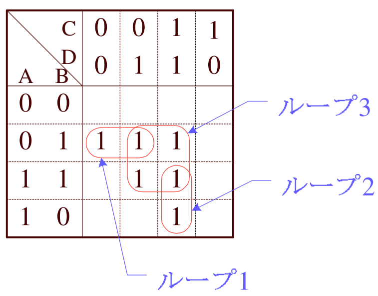

図 2: カルノー図の例。式 (6) を示している。

最後に、この 3 個のループから共通変数を取り出しその論理積を作ります。それぞれの論理積の論理和をとり、論理式を作ります。これが簡略化された論理式となります。図 2 のループ 1 の共通変数の論理積は $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$ です。ループ 2 の場合は $A \cdot C \cdot D$、ループ 3 の場合は $B \cdot D$ となります。これらの論理和は、

$$Z = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot C \cdot D + B \cdot D \tag{7}$$

[1] グレイコードである必要は無い。ただし、隣り合うセル同士、両端のセル同士の符号が 1 ビット異なっている必要がある。これを符号間の距離が 1 と言う

となります。これが、式 (6) を簡略化した結果です。

どうですか?。ブール代数の演算規則に従い簡単化するよりは、楽でしょう。どちらを使うかは、問題を見てより作業の少ないほうで論理式を簡単化すればよいでしょう。

3.2.2　カルノー図の例 2

もう一つ例を示します。簡単化したい論理式は、

$$Z = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot D + \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D \tag{8}$$

です。論理変数の並びを (A, B, C, D) とします。式 (8) の右辺のそれぞれの項が 1 となるのは
第 1 項　$(1, 0, 0, 0)$ の場合
第 2 項　$(0, 0, 0, 0)$ と $(0, 0, 0, 1)$ の場合
第 3 項　$(1, 0, 0, 1)$ と $(1, 0, 1, 1)$ の場合
第 4 項　$(0, 0, 1, 0)$ と $(0, 0, 1, 1)$ と $(0, 1, 1, 0)$ と $(0, 1, 1, 1)$ の場合
第 5 項　$(0, 1, 0, 0)$ の場合
第 6 項　$(1, 1, 1, 1)$ の場合
です。それぞれのセルに 1 を書き入れて、それをループで囲むと図 3 のようになります。3 個のループができて、その中に 1 を 4 個含んでいます。ここでよくよく見て欲しいのは、ループ 2 や 3 の場合両端が切れていても、囲むことが出来ることです。実際には左右の端と上下の端は接続されていると考えます。

それぞれの共通項を取り出して、論理積を作ると
ループ 1　$C \cdot D$
ループ 2　$\bar{B} \cdot \bar{C}$
ループ 3　$\bar{A} \cdot \bar{D}$
となります。これらの論理積の論理和をとると、簡単化は完了です。最終的な式は、

$$Z = C \cdot D + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{D} \tag{9}$$

となります。

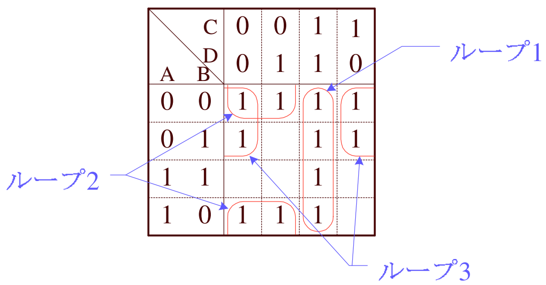

図 3: カルノー図の例。式 (8) を示している。

3.3　カルノー図のための表

これまでは、4 変数のためのカルノー図の表を使いましたが、他の場合について、図 4 に示します。要するに、縦と横の変数の値がグレイコードになっていれば良いわけです。皆さんは、グレイコードを学習したのでそれを使うほうが良いでしょう。グレイコードになっていない表もあります。その場合でも、隣同士のセルの変数の値の違いは 1 ビットで、両端の違いも 1 ビットになっているはずです。

A＼B	0	1
0		
1		

2変数

A B＼C	0	1
0 0		
0 1		
1 1		
1 0		

3変数

C	0	0	1	1
A B＼D	0	1	1	0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

4変数

C	0	0	0	0	1	1	1	1
D	0	0	1	1	1	1	0	0
A B＼E	0	1	1	0	0	1	1	0
0 0								
0 1								
1 1								
1 0								

5変数

図 4: カルノー図を作成するための表。

3.4　カルノー図法の手順のまとめ

カルノー図法により論理式を簡単化する方法をまとめると、以下のようになります。

1. カルノー図の表を作成する
2. 論理式の値が 1 に対応するセルに、1 を書く。論理式の値は、
   - 真理値表が与えられていれば、それから直接導く。
   - 簡単な論理式の場合は、ブール代数に従い計算する。
   - 複雑な場合は、主加法標準展開を行い、その結果を利用する。

   のようにして計算できる。

3. カルノー図の中の 1 が書かれているセルを出来るだけ少ない長方形 (含正方形) で囲む。この長方形のことをループという。ただし、その囲むループには、以下の条件がある。
    - 囲んだ長方形の中のセルは、全て 1 であること。
    - 囲んだ長方形の中のセルの数は、$1, 2, 4, , 8, \cdots$ のように 2^N であること。
    - 同じセルを 2 つ以上のループで共有しても良い。
    - カルノー図の上下の端、および左右の端は連続していると考える。
4. 出来るだけ少ない長方形で囲むためには、以下の手順でループを作ればよい。
    (a) 他の 1 と隣接していない 1 をループで囲む。
    (b) 2 つの隣接セルとして組み合わされて、4 つの隣接セルとならない 1 をループで囲む。
    (c) 4 つの隣接セルとして組み合わされて、8 つの隣接セルとならない 1 をループで囲む。
    (d) 8、16 と同様に進めて、1 が尽きたらループの作業を止める。
5. それぞれのループから共通変数を取り出し、ループ毎に論理積を作ります。そしてこれらの論理積の論理和を取り論理式を作ります。これが簡略化された論理式となる。

4 練習問題

4.1 標準展開

4.1.1 主加法標準展開

以下の式を主加法標準展開せよ。

(1) $A \cdot C + \bar{B} \cdot C$

(2) $A + \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$

(3) $A + B \cdot C$

(4) $A + B$

(5) $A \cdot (B + C)$

(6) $A \cdot \overline{B + C}$

(7) $A + B \cdot C$

(8) $\overline{A + B}$

(9) $(A + B) \cdot (B + C)$

(10) $\bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{C}$

4.1.2 主乗法標準展開

以下の式を主乗法標準展開せよ。

(1) $A \cdot C + \bar{B} \cdot C$

(2) $A + \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$

(3) $A + B \cdot C$

(4) $(A + B)\dot{(}B + C)$

(5) $A \cdot (B + C)$

(6) $A \cdot \overline{B + C}$

(7) $A + B \cdot C + C$

(8) $\overline{A + B} + B$

(9) $(A + B) \cdot (B + C)$

(10) $\bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{C}$

4.2 カルノー図

カルノー図を用いて、以下の論理式を簡単にせよ。

(1) $A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$

(2) $A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$

(3) $A \cdot B \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{D} + A \cdot C \cdot D + A \cdot \bar{C} \cdot D$

(4) $A \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot D + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + B \cdot \bar{C} \cdot D$

(5) $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + B \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + A \cdot C \cdot D + B \cdot C \cdot D$

(6) $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot D + \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D$