いろいろな表現(真理値表、論理式、論理回路)

山本昌志*

2004年1月16日

1　本日の授業の内容と到達目標

本日は、真理値表と論理式、論理回路の表現の内容が全く同じであることを学習する。
[内容]

- 本日の例となる回路をブラックボックスで示す。
- ブラックボックスの応答から真理値表を作成する。
- 真理値表から、論理式の表現に直す。そして、論理式の表現は真理値表と全く同じであることを確認する。論理式の表現は、以下の4通りの方法で行う。
  - 主加法標準形
  - 主乗法標準形
  - カルノー図
  - クワイン・マクラスキー法
- 論理式の表現から、MIL記号の論理回路の表現に変換する。そして、この論理回路の表現も元の真理値表と全く同一であることを確認する。

[目標]

- 真理値表と論理式、論理回路の表現の内容が全く同じであることが理解できる。
- あわせて、真理値表が示されれば、どんな順序回路でも設計できることが理解できる。

2　ブラックボックスと真理値表による組合せ回路の表

2.1　ブラックボックス

具体的な問題を考えることにする。たとえば、次のようなデジタル回路を作成することを考える。

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

- 図 1 に示すように、入力は 3 点、出力は 1 点である。
- 入力、出力とも電圧は 0 または 5[V] のいずれかである。要するによく普通にあるデジタル回路である。
- 入力に対して、出力が一意にきまる。入力の組合わせで出力が決まるので、このような回路を組合せ回路と言う。
- 入出力の関係は、表 1 のとおりである。1 つの入力線に対して、0 と 5[V] の 2 通りの組み合わせがあり、それが 3 本あるので、入力の組み合わせは 8 通りである。そのすべての応答を書いたものがこの表である。

このように、実際の装置の内容、ここでは電気回路の細かい構造 (素子と配線) を気にしないで、入力と出力、場合によっては応答を考える手法をブラックボックスと言う。

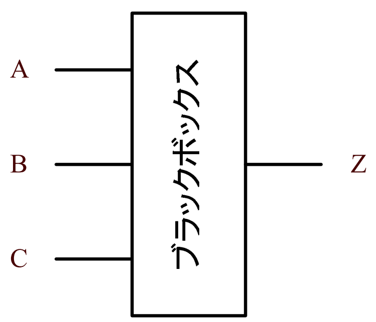

図 1: 回路の入出力を表現

表 1: 回路の応答を表現

入力 [V]			出力 [V]
A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	5	5
0	5	0	5
0	5	5	5
5	0	0	0
5	0	5	0
5	5	0	5
5	5	5	0

技術者は、最終的にこのように動作する電気回路を設計しなくてはならない。では、表 1 のような応答をする回路をどのように表現すれば良いのだろうか?。もちろん、表 1 のように表現しても、なんら問題ないが、不便な場合がある。場合によっては、違う表現が必要なこともある。同じ内容であるが、異なった表現として、以下の表現を学習してきた。

真理値表 回路の応答を直接記述できるので便利である。

論理式 回路を数学で記述する場合に便利である。数学で記述するので、その約束に従い計算することで、いろいろな等価な回路が間単に得られる。あるいは、真理値表から MIL 記号への橋渡しの役目を担う。

MIL 記号 実際の電気回路に 1 対 1 に対応している。したがって、実際の電気回路に直す場合、便利である。

本日の授業では、これら表現は異なるが、すべて内容は全く同じであることを学習する。

3 真理値表による回路の表現

表 1 の回路の応答から、この回路を論理式で表すための真理値表は直ちに導くことができる。5[V] を論理式の 1 に、0[V] をその 0 とすればよい。したがって、この回路の真理値表は、表 2 のようになる。実際の回路と論理式は、この表により繋がれた。

表 2: 回路の応答を示す真理値表

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

4 論理式による表現

真理値表があると、それから論理式を求めることができるのは学習したとおりである。学習した 4 通りの方法を示し、それが元の真理値表と全く同一であることを示す。

4.1 主加法標準形

真理値表の値が 1 になるものに着目すると、主加法標準形を得ることができる。表 2 では、

$$Z = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} \tag{1}$$

となる。

それでは、この論理式が元の真理値表と全く同じであるか確かめる。そのために、すべての入力条件で、この式の各項を計算して、最後にその論理和を取ることにより、この式を評価する。その結果は、表 3 の通りである。この表の Z は、元の真理値表である表 2 の Z と同じである。したがって、式 1 は、元の真理値表と全く同じであることがわかる。当たり前のことである。

表 3: 主加法標準形を確かめる真理値表

A	B	C	$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C$	$\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}$	$\bar{A}\cdot B\cdot C$	$A\cdot B\cdot\bar{C}$	Z
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

4.2 主乗法標準形

真理値表の値が 0 になるものに着目すると、主乗法標準形を得ることができる。表 2 では、

$$Z = (A + B + C)\cdot(\bar{A} + B + C)\cdot(\bar{A} + B + \bar{C})\cdot(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \tag{2}$$

となる。

同様に、この論理式も元の真理値表と全く同じであるか確かめる。同じように、すべての入力条件で、この式の各項を計算して、最後にその論理和を取ることにより、この式を評価する。その結果は、表 4 の通りである。この表の Z は、元の真理値表である表 2 の Z と同じである。したがって、式 1 は、元の真理値表と全く同じであることがわかる。これも、当たり前のことである。

表 4: 主乗法標準形を確かめる真理値表

A	B	C	$A+B+C$	$\bar{A}+B+C$	$\bar{A}+B+\bar{C}$	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$	Z
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

4.3　カルノー図

次にカルノー図を使って、論理式を求めよう。真理値表の $Z=1$ の部分をカルノー図の表に書き込んで、それを適当に囲めばよいのである。このようにして出来上がったカルノー図は、図 2 のようになる。

A	B \ C	0	1
0	0		1
0	1	1	1
1	1	1	
1	0		

図 2: カルノー図による表現

ここまでできれば簡単で、後は共通項を取り出して、論理和でくくればよい。すると、

$$Z = \bar{A}\cdot C + B\cdot\bar{C} \tag{3}$$

が得られる。

表 5: カルノー図による展開を確かめる真理値表

A	B	C	$\bar{A}\cdot C$	$B\cdot\bar{C}$	Z
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0

4.4　クワイン・マクラスキー法

時間が無くてこの部分の用意ができなかった。今までと同じになるはずである。興味のある人は確かめよ。

5　論理回路

論理式があれば、それに応じた MIL 記号で表現した論理回路がある。すべて書くのは大変なので、主加法標準形とカルノー図で求めた論理式を MIL 記号の回路にして、それが元の真理値表と同じであることを確認する。

5.1　主加法標準形の回路

主加法標準形の論理式は、式 (1) である。これを MIL 記号で書くと、図 3 のようになる。この回路の各場所での値を表にまとめると、表 3 のようになる。この表では、0 と 1 と書いてあるが、実際の回路では 0[V] と 5[V] である。この回路の出力を見ると、やはり元の真理値表 2 と同じである。したがって、主加法標準形から求めた論理回路も元の真理値表と全く同じ動作をする。

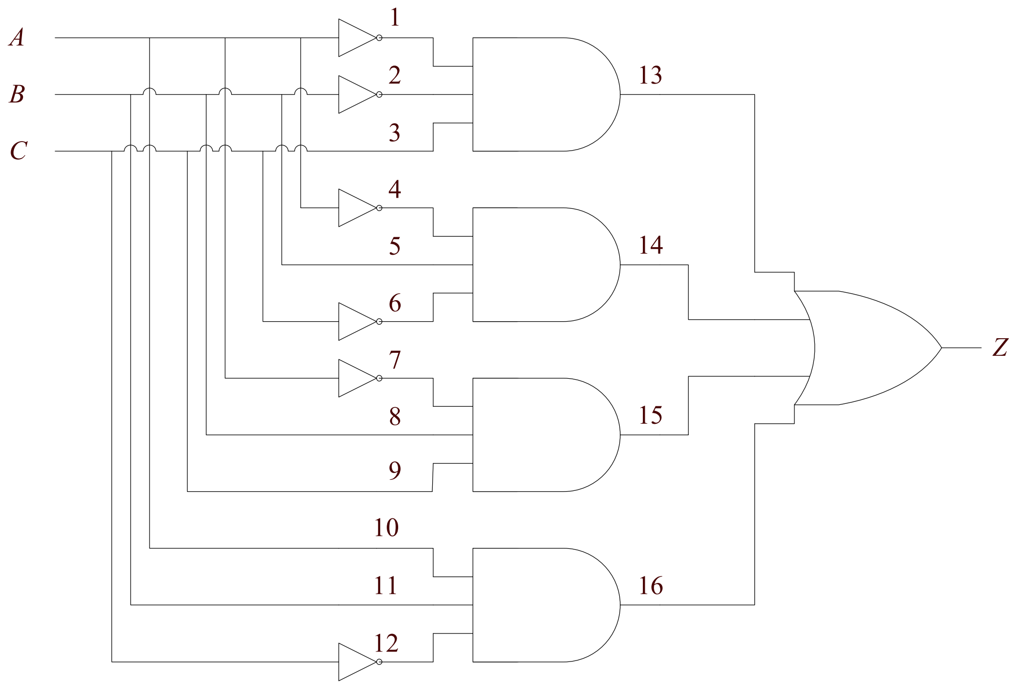

図 3: 主加法標準形の式 (1) を表わす論理回路

表 6: 主乗法標準形から求めた論理回路を確かめる真理値表。表の最上段の 1〜16 の数字は、論理回路図 3 中の場所を示す。

A	B	C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Z
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

5.2 カルノー図で求めた論理式の回路

カルノー図から求めた論理式は、式 (3) である。先ほどと同じように、これを MIL 記号で書くと、図 4 のようになる。この回路の各場所での値を表にまとめると、表 4 のようになる。この回路の出力を見ると、やはり元の真理値表 2 と同じである。したがって、カルノー図から求めた論理回路も元の真理値表と全く同じ動作をする。

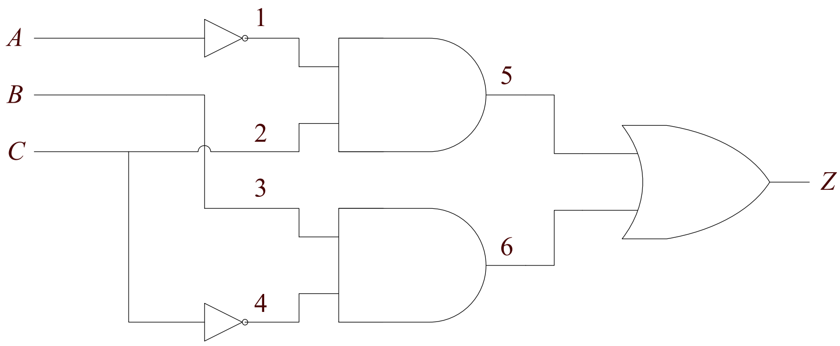

図 4: カルノー図から求めた論理式 (3) を表わす論理回路

表 7: カルノー図から求めた論理回路を確かめる真理値表。表の最上段の 1〜6 の数字は、論理回路図 4 中の場所を示す。

A	B	C	1	2	3	4	5	6	Z
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0	0	0

6 まとめ

本日の講義をまとめると、以下のようになる。

- 真理値表や論理式、MIL 記号など表現は異なるが、すべての内容はまったく同じである。それは、真理値表がすべて同じであることからわかる。
- いかなる真理値表でも、論理式や MIL 記号で表すことができる。このことは、どんな入出力関係の回路も可能であることを示している。それも、AND と OR、NOT があればどんな入出力関係の回路でも可能ということである。