後期中間試験解答 (2E 電子計算機)

1　真理値表から論理関数を導く

解答 (1)

1. 真理値表の値が 1 になる部分に注目し、最小項の和で表すと以下のようになる。

$$\text{主加法標準形} = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$$

2. 真理値表の値が 0 になる部分に注目し、最大項の積で表すと以下のようになる。

$$\text{主乗法標準形} = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$$

3. 以下ように、主乗法標準形を変形すると主加法標準形が得られる。このことから、両者は等しいと証明できる。

$$\begin{aligned} \text{主乗法標準形} &= (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B}) \\ &= A \cdot \bar{A} + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B + B \cdot \bar{B} \\ &= A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B = \text{主加法標準形} \end{aligned}$$

解答 (2)

1. 真理値表の値が 1 になる部分に注目し、最小項の和で表すと以下のようになる。

$$\text{主加法標準形} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C$$

2. 真理値表の値が 0 になる部分に注目し、最大項の積で表すと以下のようになる。

$$\text{主乗法標準形} = (A + B + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$$

2 主加法標準展開と主乗法標準展開

解答 (1)

1. 主加法標準展開は、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
A + \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C &= A \cdot (B + \bar{B}) \cdot (C + \bar{C}) + (A + \bar{A}) \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C \\
&= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C \\
&= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C
\end{aligned}
$$

2. 主乗法標準展開は、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
A + \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C &= (A + \bar{B}) \cdot (A + C) + \bar{A} \cdot B \cdot C \\
&= (A + \bar{B} + \bar{A} \cdot B \cdot C) \cdot (A + C + \bar{A} \cdot B \cdot C) \\
&= (A + \bar{B} + \bar{A} \cdot B) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + C + \bar{A}) \cdot (A + C + B \cdot C) \\
&= (A + \bar{B} + \bar{A}) \cdot (A + \bar{B} + B) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot 1 \cdot (A + C + B) \cdot (A + C + C) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + B + C) \cdot (A + C) \\
&= (A + \bar{B} + C) \cdot (A + B + C) \cdot (A + C + \bar{B} \cdot B) \\
&= (A + \bar{B} + C) \cdot (A + B + C) \cdot (A + C + \bar{B}) \cdot (A + C + B) \\
&= (A + \bar{B} + C) \cdot (A + B + C)
\end{aligned}
$$

3 カルノー図

解答 (1) カルノー図は、図 1 の通りである。したがって、簡略化した論理式は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \\
&= A \cdot B + B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \\
&\quad \text{あるいは} \\
&= A \cdot B + \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B}
\end{aligned}
$$

解答 (2) カルノー図は、図 2 の通りである。したがって、簡略化した論理式は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot D + \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D \\
&= \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{D} + C \cdot D
\end{aligned}
$$

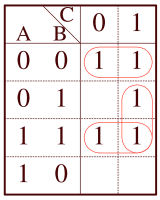

図 1: 問題 (1) カルノー図

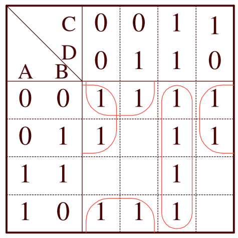

図 2: 問題 (2) のカルノー図

4　クワイン・マクラスキー法

解答 (1) この場合のクワイン・マクラスキー法の圧縮表は、図 3 のようになる。これから、主項図を作成すると、表 1 のようになる。この主項図から、最も簡単な論理関数は、

$$Z = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{D}$$

である。

表 1: 問題 1 の主項図

主項	最小項						
	0000	0001	0010	1000	0011	1001	1010
00__	◎	◎	◎		◎		
_00_	◎	◎		◎		◎	
_0_0	◎		◎	◎			◎

5　未定義組み合わせ

解答 (1) 問題の真理値表をカルノー図に書くと、図 4 のようになる。これから、未定義組合せを利用した最も簡単な論理関数は、

$$Z = \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot D + A \cdot C$$

である。

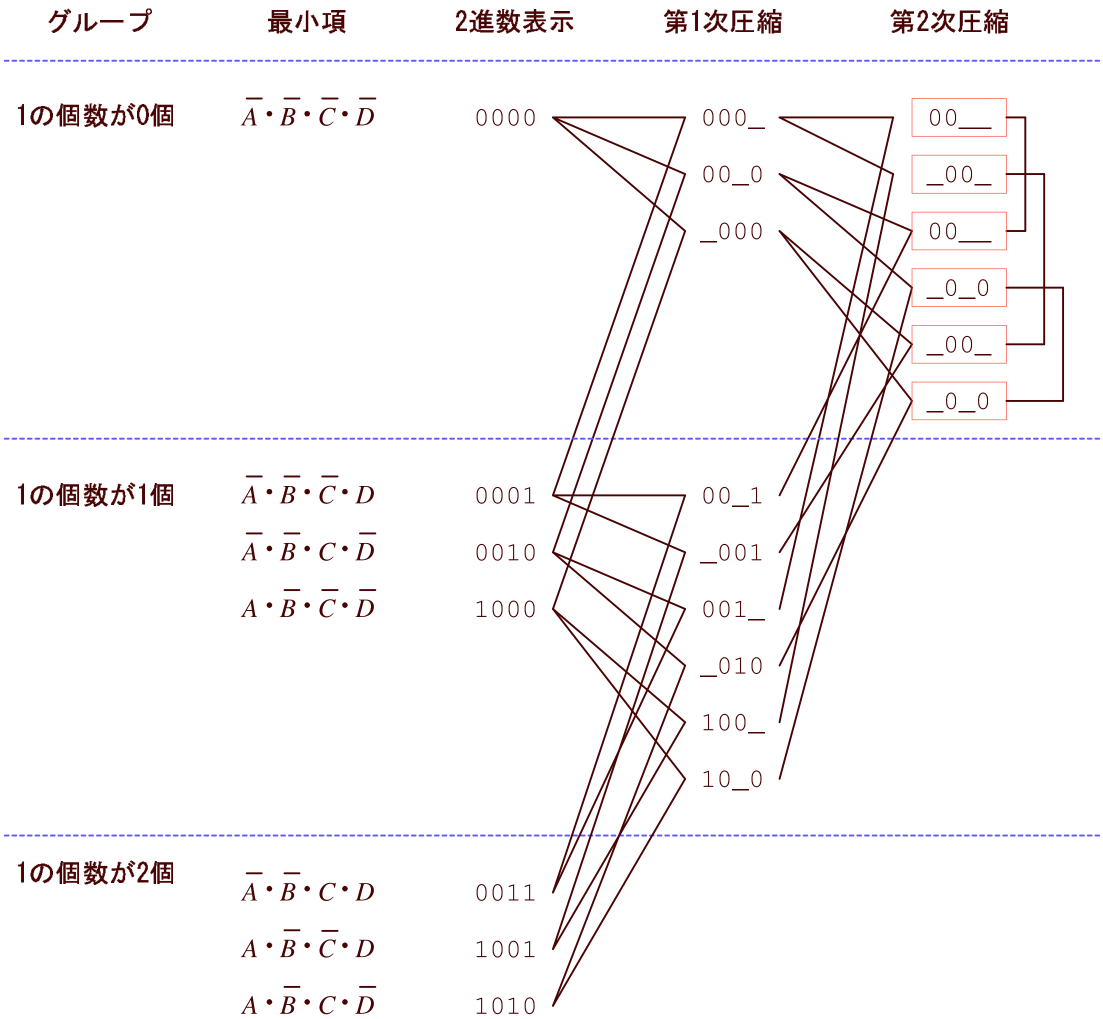

図 3: クワイン・マクラスキー法の圧縮表 (問題 1)

A B \ C D	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1		*
0 1			*	
1 1		1	1	1
1 0	*	*	1	1

図 4: 表 1 のカルノー図

6　応用問題

解答 (1) 問題の論理式の値が 1 になる場合は、直ぐに分かる。したがって、カルノー図の 0 となる部分も直ちに分かる。即ち、カルノー図の 0 と 1 となる部分は、図 5 の通りである。通常のカルノー図であれば 1 に注目しそれを書き出すが、ここの問題では 0 に注目しなくてはならない。0 を書き出して、それを 1 の時と同じように囲むと図 6 のようになる。

当然、カルノー図の各セルがゼロになる場合の積は元の論理式を表している。例えば、(A, B, C, D) の値が $(0, 1, 0, 1)$ のとき論理関数はゼロになる。これを表す論理式は、

$$(A + \bar{B} + C + \bar{D})$$

となる。1 に着目した場合と、否定の演算、及び論理和と論理積が入れ替わっていることに注意が必要である。これは、真理値表から論理式を導くとき、1 に注目した主加法標準形と 0 に注目した主乗法標準形の関係と同じである。

論理値が 0 となっているセルの論理積を取れば、元の論理式を表すのは明白であるが、ここでカルノー図の出番である。(A, B, C, D) の値が $(0, 1, 0, 0)$ と $(0, 1, 0, 1)$ の隣り合って、0 になっている場合を考える。この 2 個のセルの論理関数は、

$$\begin{aligned}(A + \bar{B} + C + D) \cdot (A + \bar{B} + C + \bar{D}) &= (A + \bar{B} + C) + (D \cdot \bar{D}) \\ &= (A + \bar{B} + C)\end{aligned}$$

と変形できる。1 の場合と同じように簡略化ができるわけである。

したがって、0 に注目したカルノー図 6 から、簡単化された論理式は、

$$Z = A \cdot (\bar{B} + D)$$

となる。

A B ＼ C D	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0
1 1	0	1	1	0
1 0	1	1	1	1

図 5: 応用問題のカルノー図 (論理値 0 と 1 を記入)

A B ＼ C D	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0
1 1	0			0
1 0				

図 6: 応用問題のカルノー図。0 に注目し、規定のループで囲んでいる。