NOR, NAND ゲートオンリー回路

山本昌志*

2004 年 2 月 6 日

1　はじめに

先週の授業で、NOR ゲートや NAND ゲートは、OR ゲートや AND ゲートに比べトランジスターの数が少ないばかりか、そこ自身で完全系であることを述べた。このようなことから、集積回路の基本ゲートとして NOR や NAND が使われることが多い。本日の授業では、いままで使ってきた OR と AND ゲートから成り立っている論理回路を NOR、あるいは NAND ゲートのみで記述することを学習する。

2　標準展開と反転ゲート

NOR と NAND ゲートのことを反転ゲートという。標準展開と反転ゲートは密接な関わりがある。それを教科書の例をもって説明する。教科書の例は、

$$f = \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot B\cdot C + A\cdot B\cdot C \tag{1}$$

である。この論理式の真理値表は、表 1 の通りである。元の式が論理和 (AND) で各項がくくられているので、論理式の値が 1 になる組み合わせが一目で分かる。

この真理値表から、加法標準展開と乗法標準展開を計算する。後で分かることであるが、こうすると NAND や NOR で表現するのが簡単になる。加法標準展開と乗法標準展開は、カルノー図を使うのが簡単である。加法標準展開の場合、カルノー図は 1 に着目するのが良い。一方、乗法標準展開の場合は、0 に着目するべきである。それぞれのカルノー図を図 1 と 2 に示す。

A	B \ C	0	1
0	0	1	
0	1	1	1
1	1		1
1	0		

図 1: 1 に着目したカルノー図

A	B \ C	0	1
0	0		0
0	1		
1	1	0	
1	0	0	0

図 2: 0 に着目したカルノー図

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

表 1: 問題の真理値表

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

これから、式 (1) は、それぞれ

$$f = \bar{A}\cdot\bar{C} + B\cdot C \qquad \text{加法標準展開} \tag{2}$$

$$f = (\bar{A} + C)\cdot(B + \bar{C}) \qquad \text{加法標準展開} \tag{3}$$

となる。

これから、NAND ゲートオンリーの式と NOR ゲートオンリーの式を導く。まずはじめに、NAND ゲートオンリーは、加法標準形を使う。これを、以下のように変形する。

$$\begin{aligned} f &= \bar{\bar{f}} \\ &= \overline{\overline{\bar{A}\cdot\bar{C} + B\cdot C}} \\ &\qquad \text{ド・モルガンの定理より} \\ &= \overline{\overline{\bar{A}\cdot\bar{C}}\cdot\overline{B\cdot C}} \end{aligned} \tag{4}$$

これで、すべての項が $\overline{x\cdot y}$ の形になっているので、NAND ゲートオンリーである。

同じことを、乗法標準形に施す。

$$\begin{aligned} f &= \bar{\bar{f}} \\ &= \overline{\overline{(\bar{A} + C)\cdot(B + \bar{C})}} \\ &\qquad \text{ド・モルガンの定理より} \\ &= \overline{\overline{(\bar{A} + C)} + \overline{(B + \bar{C})}} \end{aligned} \tag{5}$$

これは、すべての項が $\overline{x + y}$ の形になっているので、NOR ゲートオンリーである。

これから分かるように、加法標準形や乗法標準形にすれば、NAND や NOR オンリーの論理式に変形するのは簡単である。この変形をここでは、カルノー図を使って行ったが、もちろん他の方法でも良い。問題に合わせて、簡単な方法で標準展開すればよいのである。

3　論理回路

3.1　NAND オンリー回路

このあたりは、参考文献に[1]分かりやすく記述してあるので、それを参考にしている。ここでは、基本論理ゲート (OR, AND, NOT) から成り立っている回路を NAND ゲートのみ (といっても、NOT はある) に書き換える方法を示す。NOT が許されるのは、それは 1 入力の NAND と考えても良いからである。

基本論理ゲート (OR, AND, NOT) を NAND ゲートに置き換える場合、問題となりそうなのが、OR ゲートである。NOT ゲートはそのままで良いし、AND ゲートは出力に 2 つ NOT ゲートをつければ、NAND と NOT ゲートになる。OR ゲートを AND あるいは NAND ゲートに変換するには、いつものように、ド・モルガンの定理を利用する。ド・モルガンの定理は、

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \cdots = \overline{A \cdot B \cdot C \cdot \cdots} \tag{6}$$

であるから、図 1 のような対応がある。それでは、例を用いて説明する。最初に、次の回路を NAND オンリー回路に変換する。

図 3: OR ゲートをド・モルガンの定理を使って変換

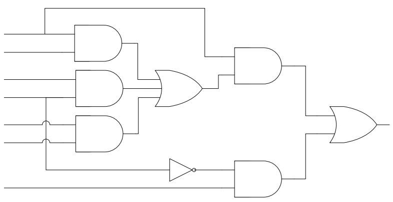

図 4: 元の回路

まずはじめに、問題となりそうな、OR ゲートの入力を 2 重否定 (NOT) する。こうしても、回路の動作は全く変化しない。その回路が、図 5 である。

これからは、簡単で、入力が否定されている OR ゲートを NAND に変えるただけである。

この例は簡単であるが、他も大体このパターンで変形すればよい。ただし、NOT ゲートの数が合わないときには、適当に入れて、論理が変わらないようにする必要がある。これも NAND ゲートオンリー回路とほとんど同じである。ここでは、説明しない。

[1]信州大学　井澤裕司氏の web サイト http://laputa.cs.shinshu-u.ac.jp/~yizawa/logic/chap7/chap7.html

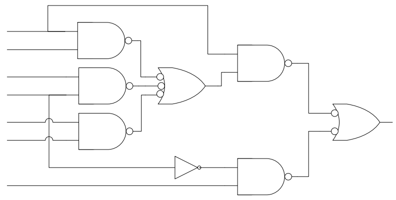

図 5: OR ゲートの前に、2 重否定 (NOT) を追加

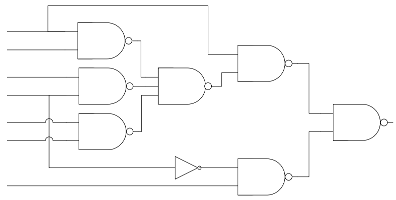

図 6: NAND オンリー回路への変形

4 練習問題

以下の問題と解き、レポートとして提出すること。期限は、2 週間後 (2 月 20 日) とする。

- 教科書の問題 5.13
- 教科書の問題 5.15
- 教科書の問題 5.16
- 教科書の問題 5.17