

専攻分野	工学
専攻区分	電気電子工学

テーマ：電磁場解析のための2次要素を使った  
有限要素法の研究

キーワード科目：電磁気学

氏名：夏井 拓也

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>計算原理</b>	<b>2</b>
2.1	ヘルムホルツ方程式の汎関数 . . . . .	2
2.2	変分法から有限要素法へ . . . . .	3
2.3	離散化式 . . . . .	5
2.4	曲線要素 . . . . .	7
2.5	要素内における積分 . . . . .	8
2.5.1	座標変換について . . . . .	8
2.5.2	三角形 2 次要素の座標変換 . . . . .	8
2.5.3	曲線要素の座標変換 . . . . .	10
<b>3</b>	<b>結果</b>	<b>13</b>
3.1	計算の順序 . . . . .	13
3.2	計算結果 . . . . .	13
3.3	精度検証 . . . . .	14
<b>4</b>	<b>考察</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>まとめと今後の課題</b>	<b>17</b>

# 1 序論

加速器は複雑なシステムで様々なシミュレーションコードを用いて設計を行う。例えば、電子銃のビーム軌道計算、電磁石の磁場計算、加速空洞の高周波電磁場計算などがある。シミュレーションコードの精度は、加速器の性能に影響をおよぼし、その向上は重要な課題となっている。本研究では、加速空洞を設計するための従来より高精度が得られる計算コードの開発を行った。

加速空洞は共振状態の電磁場を貯め、その電場によって荷電粒子を加速する装置である。そのため、加速空洞の設計では、共振周波数および電磁場分布を精度良く求めなくてはならない。とくに、共振周波数は高い精度が要求される。なぜならば、空洞の  $Q$  値は  $10^4 \sim 10^5$  なので、 $10^{-6}$  程度の周波数の計算精度が必要となってくる。3次元問題でこの程度の精度を得ることは困難であるが、幸い、多くの加速空洞は軸対称構造なので2次元問題として取り扱うことができる。2次元問題であれば、 $10^{-6}$  以上の計算精度を得ることも可能にである。

しかし、従来の計算コードでは  $10^{-4}$  程度の精度が限界であり、2桁程度の精度の向上が望まれている。この程度の精度が限界である理由は、領域を解析するための要素に三角形1次要素を使っているためと考えられる。

本研究で開発したコードでは解析の精度を上げるため三角形2次要素を用いた。これにより、電磁場は要素内で2次の項まで表現でき、1次近似である1次要素に比べ格段に精度は高くなる。また、直線で囲まれた三角形要素を用いると、境界が曲線のときに形状誤差が計算精度を落とす原因になる。これを防ぐため、曲線境界では曲線2次要素を用いるような離散化の式を導き、計算コードを作成した。

有限要素法の解析では、解析領域を要素分割するメッシュ生成プログラムも必要になる。本研究では、三角形2次要素と曲線2次要素に対応したメッシュ生成を行うメッシュジェネレータを用意した。これにより、どのような2次元形状も要素分割できるようになり、軸対称空洞であればどのような構造も解析可能になった。

本研究では、計算精度の向上を主な目標として共振空洞の高周波電磁場解析コードを作成した。従来の計算コードより高精度の解析をめざし、三角形2次要素と曲線2次要素を用いた有限要素法で解析を行った。このような要素を使用するための離散化式を導き出し、実際に計算コードを作成することができた。その結果、 $2 \times 10^{-10}$  の精度が得られることを確認し、目標は達成された。この成果を本レポートとしてまとめる。

## 2 計算原理

### 2.1 ヘルムホルツ方程式の汎関数

共振空洞内は金属で囲まれた真空の空間となっており，その共振モードを解析する場合，内部には電荷も電流もない条件で計算する．これは，マクスウェルの方程式で電荷密度  $\rho = 0$ ，電流密度  $j = 0$  に対応し，これらからヘルムホルツ方程式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E} \quad (2)$$

が得られる [1]．ここで， $\mathbf{H}$  は磁場， $\mathbf{E}$  は電場， $\omega$  は共振周波数， $c$  は光速である．これらの微分方程式を金属の境界条件

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad (3)$$

のもと解けば共振空洞内の電磁場が求まる．ここで， $\mathbf{n}$  は境界の法線ベクトルである．

電磁場分布を求めるには，(1) 式や (2) 式の微分方程式を境界条件を入れて解く方法が一般的である．しかし，変分法を用い，汎関数の停留値を求めることでも同じ解が得られる．有限要素法は変分法を利用してコンピュータで問題を解く方法である．変分法を使う場合は，解くべき問題の汎関数を設定しなくてはならない．共振空洞の電磁場分布を求めるために，(1) 式と (2) 式のうちどちらを解いてもよい．しかし，後で述べるがここで問題とする  $\text{TM}_0$  モードでは，磁場に関する式を解く方が計算がしやすいので (1) 式に関する変分問題を解くこととする．

ここで，磁場に関するヘルムホルツ方程式，式 (1) の汎関数は，

$$J[\mathbf{H}] = \int \left[ (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \right] dV \quad (4)$$

である [1]．ここで，アスタリスク \* は複素共役を表す．

通常の空洞では定在波の  $\text{TM}_0$  モードが運転に使われる．定在波の場合，磁場は実数として取り扱えるので  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$  となる．さらに，空洞の形状は完全軸対称なので，円柱座標系を使う．すると解析すべき  $\text{TM}_0$  モードは，電場は  $E_r, E_z$ ，電場は  $H_\theta$  のみである．もちろんこれらの電磁場は，座標  $(r, z)$  の関数である．従って，磁場  $H_\theta$  を解析する方が簡単である．このような問題の軸対称空洞電磁場の汎関数は，

$$J[H_\theta] = \iint_D \left[ \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{H_\theta}{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \left(\frac{H_\theta}{r}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 H_\theta^2 \right] 2\pi r dr dz \quad (5)$$

となる [1]．この汎関数の停留値を求めること，すなわち  $\delta J[H_\theta(r, z)] = 0$  となる  $H_\theta$  を求めることが課題となる． $H_\theta$  が空洞内の磁場を表し，式 (5) が解析すべき方程式となる．

## 2.2 変分法から有限要素法へ

汎関数式 (5) が停留値をもつ  $H_\theta$  を求めることに問題が還元されたが、このままの形ではコンピュータで直接計算することはできない。なぜなら、式 (5) は形状が複雑なため積分不可能で、その停留値も数値計算できないからである。そこで、汎関数を離散化した式を導き、コンピュータで計算できる形にする。変分法をコンピュータで解ける形に近似する方法が有限要素法である。

ここで、式 (5) のように求めた汎関数をすこし簡単な形に書き直と、

$$J[u] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{u}{r} \right)^2 - \lambda u^2 \right] r dr dz \quad (6)$$

となる。ここで、 $\lambda = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2$ 、 $u = H_\theta$  とおいた。また、 $2\pi$  は定数なので省略した。 $u$  を求めることが磁場分布を求めることに対応し、固有値  $\lambda$  を求めることが共振周波数を求めることに対応する。式 (6) を離散化し、コンピュータで解ける形にする。

有限要素法では、区分多項式を使い関数  $u(r, z)$  を近似する。この区分多項式を用いるために解析領域 (汎関数の積分領域) を三角形要素に分割する [3]。その分割の例を図 1 に示す。これは、4 分の 1 の円を要素分割した例である。

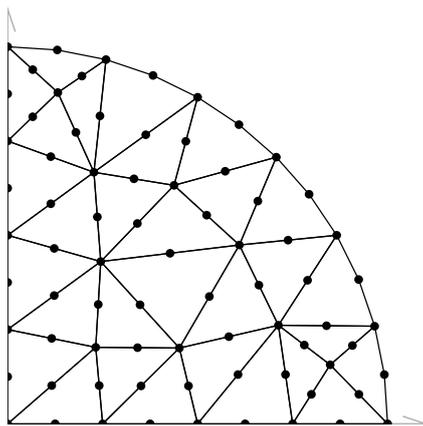


図 1: 要素分割と節点

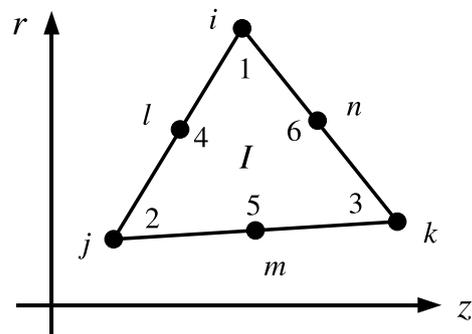


図 2: 三角形 2 次要素と節点

この図の各三角形を要素といい、有限要素法ではその内部を多項式で近似していく。図 1 の要素の 1 つを取り出したものが図 2 で、この内部の磁場  $u$  を多項式で近似するのである。もちろん隣接する三角形同士では、磁場  $u$  は連続になるように多項式を決める。

本研究では，計算精度を高めるために2次要素を使用した．2次要素では6つの節点を用いて多項式を表現する．要素分割するときには，要素には通し番号をつけ，同じように節点にも通し番号をつける．例えば，図2の要素は，要素番号  $I$  で節点  $i, j, k, l, m, n$  を持っている．また，要素の中では，節点の局所番号として1から6までの番号もつける．例えば，今の場合，要素  $I$  の2つ目の節点は，節点  $j$  である．局所番号1から3までの節点は三角形の頂点に，4から6までの節点は三角形の辺の midpoint に位置している．

要素の中の関数  $u(r, z)$  を2次関数で近似するのが2次要素である．この場合，要素  $I$  の中の  $u$  の形は，

$$u_I(r, z) = u_{I1}g_{I1}(r, z) + u_{I2}g_{I2}(r, z) + u_{I3}g_{I3}(r, z) \\ + u_{I4}g_{I4}(r, z) + u_{I5}g_{I5}(r, z) + u_{I6}g_{I6}(r, z) \quad (7)$$

となる．添え字  $It$  は要素  $I$  の局所節点  $t$  という意味である． $g_{It}(r, z)$  は要素  $I$  の局所節点  $t$  の座標で1となり，ほかの節点の座標では0となるような  $r, z$  に関する2次関数である．また，要素  $I$  の領域以外では  $g_{It} = 0$  となる．この  $g(r, z)$  は形状関数と呼ばれる．このようにすると，節点  $i$  の座標では， $u = u_i$  となる．なお， $g(r, z)$  の具体的な式は後で示す．

また，領域全体での  $u(r, z)$  は，要素の数を  $N$  とすると，要素1から  $N$  までの関数の和として表され，

$$u(r, z) = \sum_{I=1}^N u_I(r, z) \\ = \sum_{I=1}^N [u_{I1}g_{I1}(r, z) + u_{I2}g_{I2}(r, z) + u_{I3}g_{I3}(r, z) \\ + u_{I4}g_{I4}(r, z) + u_{I5}g_{I5}(r, z) + u_{I6}g_{I6}(r, z)] \quad (8)$$

となる．つまり，関数  $u(r, z)$  の形は， $u_1$  から  $u_n$  までの定数を決めることで決定する ( $n$  は節点数)．

このように関数  $u(r, z)$  の形を決め，式(6)に代入すると右辺の値は， $u_1$  から  $u_n$  の値によって決定することがわかる．すると，汎関数  $J[u]$  はもはや汎関数ではなく， $u_1, \dots, u_n$  を変数とする多変数関数  $J(u_1, \dots, u_n)$  となる．そして，関数  $u(r, z)$  を変化させることは， $u_1, u_2, \dots, u_n$  の値を変化させることに置き換わる．

変分法において汎関数  $J[u]$  の停留値を求めることは，関数  $u$  を変化させたときの  $J[u]$  の極小値または極大値をさがすことである．今，関数  $u$  は式(6)によって近似しているので， $J[u]$  の極小値または極大値をさがすことは，多変数関数  $J(u_1, \dots, u_n)$  の極小値または極大値をさがすことに置き換わる．つまり，これは多変数関数  $J(u_1, \dots, u_n)$  の極値問題である．汎関数の停留値を求めるという変分問題が，多変数関数の極値を求めるという問題に置き換わったのである．

このように，変分問題を要素分割し区分多項式を使い極値問題に置き換え，近似的に変分問題を解く方法が有限要素法である．

## 2.3 離散化式

ここで，(8) 式によって関数  $u(r, z)$  を近似することで，汎関数式 (6) の停留値を求める変分問題は関数  $J(u_1, \dots, u_n)$  の極値問題に変換された．よって，関数  $J(u_1, \dots, u_n)$  が極値をとる  $u_1, \dots, u_n$  を求めればよい．

まず，関数  $J(u_1, \dots, u_n)$  が極値をとる条件は，

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J}{\partial u_n} = 0$$

である．これらを計算すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{u}{r} \right)^2 - \lambda u^2 \right] r dr dz \\ &= \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{I=1}^N \iint_{(I)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{u}{r} \right)^2 - \lambda u^2 \right] r dr dz \end{aligned} \quad (9)$$

となる．ここで， $(I)$  は要素  $I$  の領域という意味である．変数として  $u_i$  が含まれている領域は，要素が節点  $i$  を持っている領域である．従って，偏微分式が値を持つのは非常に少ない領域だけである．今，節点  $i$  を持つ要素が要素  $I, L, K$  だったとすると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(I)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{u}{r} \right)^2 - \lambda u^2 \right] r dr dz \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(L)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{u}{r} \right)^2 - \lambda u^2 \right] r dr dz \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(K)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{u}{r} \right)^2 - \lambda u^2 \right] r dr dz \end{aligned} \quad (10)$$

となる．このように考えると，少し複雑なので要素  $I$  の寄与分だけをまず考えることとする．このようにすると， $\frac{\partial J}{\partial u_i}$  の要素  $I$  の寄与分は，

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} \Big|_{(I)} = \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(I)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{u}{r} \right)^2 - \lambda u^2 \right] r dr dz \quad (11)$$

となる．ただし， $|_{(I)}$  は要素  $I$  の寄与分の意味である． $u_i$  は要素  $I$  が持っている節点なので， $u_i$  を局所節点番号で表したものを  $u_{Ip}$  とする ( $p$  は 1 から 6 のいずれか)．今は領域  $I$  しか考えていないので  $u_{I1}$  などは  $u_1$  に，同様に  $g_{I1}$  などは  $g_1$  と表記する．つまり，領域  $I$  での  $u$  の式は，

$$\begin{aligned} u &= u_1g_1 + u_2g_2 + u_3g_3 + u_4g_4 + u_5g_5 + u_6g_6 \\ &= \sum_{t=1}^6 u_tg_t \end{aligned} \quad (12)$$

となる．また，式 (11) に式 (12) を代入する．従って，

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_p} \Big|_{(I)} &= \frac{\partial}{\partial u_p} \iint_{(I)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{u}{r} \right)^2 - \lambda u^2 \right] r dr dz \\ &= \frac{\partial}{\partial u_p} \iint_{(I)} \left( \frac{\partial \sum_{t=1}^6 u_tg_t}{\partial r} \right)^2 r dr dz + \frac{\partial}{\partial u_p} \iint_{(I)} \left( \frac{\partial \sum_{t=1}^6 u_tg_t}{\partial z} \right)^2 r dr dz \\ &\quad + 2 \frac{\partial}{\partial u_p} \iint_{(I)} \frac{\sum_{t=1}^6 u_tg_t}{r} \frac{\partial \sum_{t=1}^6 u_tg_t}{\partial r} r dr dz + \frac{\partial}{\partial u_p} \iint_{(I)} \left( \frac{\sum_{t=1}^6 u_tg_t}{r} \right)^2 r dr dz \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u_p} \iint_{(I)} \lambda \left( \sum_{t=1}^6 u_tg_t \right)^2 r dr dz \end{aligned} \quad (13)$$

となり，さらに計算を進めると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_p} \Big|_{(I)} &= 2 \iint_{(I)} \sum_{t=1}^6 \left( u_t \frac{\partial g_t}{\partial r} \right) \frac{\partial g_p}{\partial r} r dr dz + 2 \iint_{(I)} \sum_{t=1}^6 \left( u_t \frac{\partial g_t}{\partial z} \right) \frac{\partial g_p}{\partial z} r dr dz \\ &\quad + 2 \iint_{(I)} \left[ g_p \sum_{t=1}^6 \left( u_t \frac{\partial g_t}{\partial r} \right) + \sum_{t=1}^6 (u_tg_t) \frac{\partial g_p}{\partial r} \right] dr dz + 2 \iint_{(I)} g_p \frac{\sum_{t=1}^6 u_tg_t}{r} dr dz \\ &\quad - \lambda 2 \iint_{(I)} \sum_{t=1}^6 (u_tg_t) g_p r dr dz \end{aligned} \quad (14)$$

となる．この式は， $u_1, \dots, u_6$  に関する 1 次式である．この式を  $u_1, \dots, u_6$  の項でまとめ

整理すると

$$\frac{\partial J}{\partial u_p} \Big|_{(I)} = \sum_{t=1}^6 a_{pt} u_t - \lambda \sum_{t=1}^6 b_{pt} u_t \quad (15)$$

ただし

$$a_{pt} = \iint_{(I)} \left( \frac{\partial g_p}{\partial r} \frac{\partial g_t}{\partial r} r + \frac{\partial g_p}{\partial z} \frac{\partial g_t}{\partial z} r + g_p \frac{\partial g_t}{\partial r} + \frac{\partial g_p}{\partial r} g_t + \frac{g_p g_t}{r} \right) dr dz$$

$$b_{pt} = 2 \iint_{(I)} g_p g_t r dr dz$$

となる．

ここでは，特定の三角形要素について考えたが，すべての要素についても同様に考えることができる．従って，節点  $p$  を含む領域をすべて考え， $\frac{\partial J}{\partial u_p} = 0$  ということ を考慮すると連立方程式ができる．

式 (15) から連立方程式は一般化固有値問題

$$K u = \lambda M u \quad \text{ただし } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

に帰着する．この行列  $K, M$  の要素を決めなければならない．

(15) 式は，行列  $KM$  の  $i$  行目に当たる．ただし， $i$  は今考えている要素  $I$  の局所節点番号  $p$  に当たる要素番号である．また，要素  $I$  の局所節点番号  $t$  の節点番号を  $j$  とすると，要素  $I$  の寄与分について，行列  $KM$  の要素の値がわかる．これらを書き出すと，

$$k_{ij} \Big|_{(I)} = 2 \iint_{(I)} \left( \frac{\partial g_p}{\partial r} \frac{\partial g_t}{\partial r} r + \frac{\partial g_p}{\partial z} \frac{\partial g_t}{\partial z} r + g_p \frac{\partial g_t}{\partial r} + \frac{\partial g_p}{\partial r} g_t + \frac{g_p g_t}{r} \right) dr dz \quad (17)$$

$$m_{ij} \Big|_{(I)} = 2 \iint_{(I)} g_p g_t r dr dz \quad (18)$$

となる．

このように，各要素ごとに行列への寄与分を計算していき，すべての要素について和をとれば解くべき固有値問題の行列を作ることができる．

## 2.4 曲線要素

解析対象の領域が曲線の境界を含んでいる場合，直線から構成される三角形要素だけを使った場合に領域の形状を精度よく近似できないという問題がある．このため，三角形要素だけを使っているだけでは2次要素を使ったとしても，なかなか精度が上がらない．

そこで，曲線の境界に接している要素には曲線要素を用い，形状を精度よく近似する．この曲線要素を図3に示す．図3のように，曲線要素は三角形要素の一边を曲線で置き換えた形をしている．この曲線部分で境界を近似していく．

曲線要素は，普通の三角形2次要素を座標変換した形になっている．従って，曲線要素も座標変換して三角形2次要素と同じ形にすれば，三角形要素と同様に扱える．実際の曲線要素の取り扱い，曲線要素の座標変換で述べる．

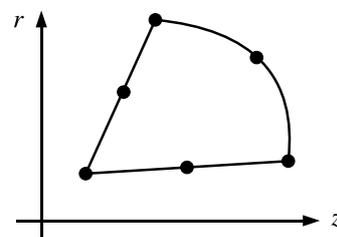


図 3: 曲線要素と節点

## 2.5 要素内における積分

### 2.5.1 座標変換について

以上の議論で空洞内部の電磁場は式(16)を解けばよいことが分かった．式(16)の行列の成分は，式(17)(18)より求められる．ここでは式(17)(18)の積分の方法を示す．

実際に積分を計算する場合には，局所座標系とよばれる座標系に座標変換する．この座標系では，曲線要素も含めて積分範囲がすべて同じになる．

局所座標系で形状関数を定義すると非常に簡単に表せる．また，座標変換する事により，すべての要素が同様にあつかえるようになりプログラミングが容易になる．

### 2.5.2 三角形2次要素の座標変換

2次要素の場合，図4のように節点を持っている．また，座標変換したときの三角形要素を図5に示す．

この座標変換の式は，

$$r = (r_1 - r_3)r' + (r_2 - r_3)z' + r_3 \quad (19)$$

$$z = (z_1 - z_3)r' + (z_2 - z_3)z' + z_3 \quad (20)$$

となり，この式より， $r', z'$ は以下ようになる．

$$r' = \frac{(r - r_3)(z_2 - z_3) - (z - z_3)(r_2 - r_3)}{(r_1 - r_3)(z_2 - z_3) - (z_1 - z_3)(r_2 - r_3)} \quad (21)$$

$$z' = \frac{(r_1 - r_3)(z - z_3) - (z_1 - z_3)(r - r_3)}{(r_1 - r_3)(z_2 - z_3) - (z_1 - z_3)(r_2 - r_3)} \quad (22)$$

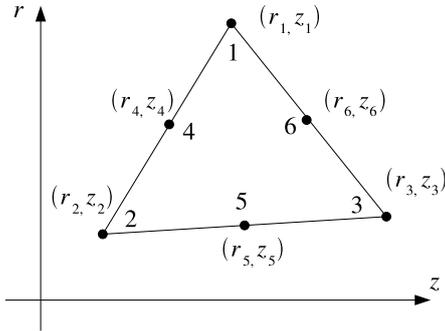


図 4: 全体座標系の 2 次要素の節点

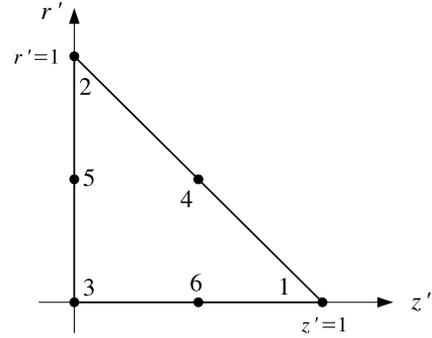


図 5: 局所座標系の 2 次要素の節点

となる．また，この座標変換のヤコビアン行列  $J_1$  およびヤコビアン  $|J_1|$  は，

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial r'} & \frac{\partial z}{\partial r'} \\ \frac{\partial r}{\partial z'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 - r_3 & z_1 - z_3 \\ r_2 - r_3 & z_2 - z_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$|J_1| = (r_1 - r_3)(z_2 - z_3) - (z_1 - z_3)(r_2 - r_3) \quad (24)$$

である．従って，式 (17)(18) の積分は

$$\iint_D F(r, z) dz dr = \int_0^1 \left( \int_0^{1-r'} F(r, z) |J_1| dz' \right) dr' \quad (25)$$

のように座標変換される．

ここで，形状関数  $g_i$  を具体的に決める．これは 2 次関数で，節点  $i$  では  $g_i = 1$ ，それ以外の節点では  $g_i = 0$  となることを考えると座標変換した系では簡単に決まる．形状関数は，

$$g_1(r', z') = 2r' \left( r' - \frac{1}{2} \right) \quad (26)$$

$$g_2(r', z') = 2z' \left( z' - \frac{1}{2} \right) \quad (27)$$

$$g_3(r', z') = 2(-r' - z' + 1) \left( -r' - z' - \frac{1}{2} \right) \quad (28)$$

$$g_4(r', z') = 4r' z' \quad (29)$$

$$g_5(r', z') = 4z' (z' - r' + 1) \quad (30)$$

$$g_6(r', z') = 4r' (r' - z' + 1) \quad (31)$$

となる．

また，被積分関数の中には  $r$  偏微分， $z$  偏微分が含まれる場合もあるので，演算子の変換

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{bmatrix} \quad (32)$$

を用いて，

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial r'}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{\partial z'}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{z_2 - z_3}{|\mathbf{J}_1|} \frac{\partial}{\partial r'} - \frac{z_1 - z_3}{|\mathbf{J}_1|} \frac{\partial}{\partial z'} \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} = -\frac{r_2 - r_3}{|\mathbf{J}_1|} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{r_1 - r_3}{|\mathbf{J}_1|} \frac{\partial}{\partial z'} \quad (34)$$

が得られる．

これらの式を使うと，被積分関数も  $r'$ ,  $z'$  の関数となり，三角形 2 次要素の積分はすべて

$$\iint_D F(r, z) dz dr = \int_0^1 \left( \int_0^{1-r'} G(r', z') |\mathbf{J}_1| dz' \right) dr' \quad (35)$$

という形に帰着する．この形に変換すると積分範囲が簡単になり，被積分関数も導きやすく，プログラミングする上でも非常に便利である．

### 2.5.3 曲線要素の座標変換

曲線 2 次要素の座標は図 6 のようになっている．ここで，節点 1 から 2 までの間が曲線になっている．この曲線上に節点 4 があるとす．節点 4 は節点 1 と節点 2 から，等距離の位置にあるとする．

まずは，直線の三角形要素を座標変換したときと同じ式で座標変換する．その図を図 7 に示す．

この変換の式は直線要素を変換した式に等しい．つまり，式 (19),(20) で表される．また，図 7 の中の， $k_r, k_z$  は  $r', z'$  座標での節点 4 の座標である．これを求めると，

$$k_r = \frac{(r_4 - r_3)(z_2 - z_3) - (z_4 - z_3)(r_2 - r_3)}{(r_1 - r_3)(z_2 - z_3) - (z_1 - z_3)(r_2 - r_3)} \quad (36)$$

$$k_z = \frac{(r_1 - r_3)(z_4 - z_3) - (z_1 - z_3)(r_4 - r_3)}{(r_1 - r_3)(z_2 - z_3) - (z_1 - z_3)(r_2 - r_3)} \quad (37)$$

となる．曲線要素を座標変換するときは，その変換が二段階に分かれていて， $r, z \rightarrow r', z' \rightarrow r'', z''$  と変換していく．

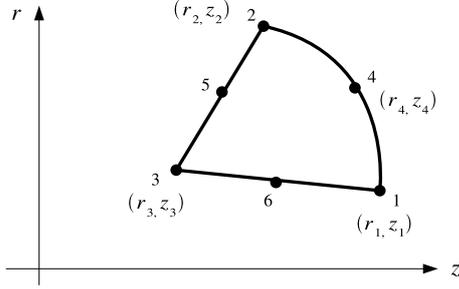


図 6: 全体座標系の曲線要素

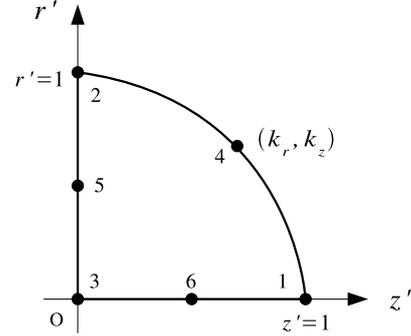


図 7: 三角形要素と同じ座標変換

$r', z' \rightarrow r'', z''$  の変換は ,

$$r' = r'' + (4k_r - 2)r''z'' \quad (38)$$

$$z' = z'' + (4k_z - 2)r''z'' \quad (39)$$

を使う . この式で , 曲線が直線になる . つまり , 三角形要素と同じように局所座標系に変換される .

次に ,  $r, z$  を  $r'', z''$  を使って表してみると , 以下のようなになる .

$$r = (r_1 - r_3)\{r'' + (4k_r - 2)r''z''\} + (r_2 - r_3)\{z'' + (4k_z - 2)r''z''\} + r_3 \quad (40)$$

$$z = (z_1 - z_3)\{r'' + (4k_r - 2)r''z''\} + (z_2 - z_3)\{z'' + (4k_z - 2)r''z''\} + z_3 \quad (41)$$

$r', z'$  から  $r'', z''$  への変換をするときのヤコビアン行列  $J_2$  およびヤコビアン  $|J_2|$  は以下のようになる .

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial r'}{\partial r''} & \frac{\partial z'}{\partial r''} \\ \frac{\partial r'}{\partial z''} & \frac{\partial z'}{\partial z''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (4k_r - 2)z'' & (4k_z - 2)z'' \\ (4k_r - 2)r'' & 1 + (4k_z - 2)r'' \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$|J_2| = 1 + (4k_r - 2)z'' + (4k_z - 2)r'' \quad (43)$$

また演算子の変換は ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = J_1^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{bmatrix} = J_1^{-1} J_2^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r''} \\ \frac{\partial}{\partial z''} \end{bmatrix} \quad (44)$$

より以下のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{-(z_1 - z_3)(2 - 4k_r)r'' + (z_2 - z_3)[1 - (2 - 4k_z)r'']}{|\mathbf{J}_1||\mathbf{J}_2|} \frac{\partial}{\partial r''} \\ &+ \frac{(z_2 - z_3)(2 - 4k_z)z'' + (z_1 - z_3)[1 - (2 - 4k_r)z'']}{|\mathbf{J}_1||\mathbf{J}_2|} \frac{\partial}{\partial z''} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{(r_1 - r_3)(2 - 4k_r)r'' - (r_2 - r_3)[1 - (2 - 4k_z)r'']}{|\mathbf{J}_1||\mathbf{J}_2|} \frac{\partial}{\partial r''} \\ &+ \frac{-(r_2 - r_3)(2 - 4k_z)z'' + (r_1 - r_3)[1 - (2 - 4k_r)z'']}{|\mathbf{J}_1||\mathbf{J}_2|} \frac{\partial}{\partial z''} \end{aligned} \quad (46)$$

曲線要素の場合も，座標変換を施すと要素の形は直線要素と同じになる．従って，形状関数の形も全く同じになる．ただ変数を  $r', z' \rightarrow r'', z''$  とするだけである．あらためて形状関数を書き出すと，

$$g_1(r'', z'') = 2r'' \left( r'' - \frac{1}{2} \right) \quad (47)$$

$$g_2(r'', z'') = 2z'' \left( z'' - \frac{1}{2} \right) \quad (48)$$

$$g_3(r'', z'') = 2(-r'' - z'' + 1) \left( -r'' - z'' - \frac{1}{2} \right) \quad (49)$$

$$g_4(r'', z'') = 4r''z'' \quad (50)$$

$$g_5(r'', z'') = 4z''(z'' - r'' + 1) \quad (51)$$

$$g_6(r'', z'') = 4r''(r'' - z'' + 1) \quad (52)$$

となる．積分の形は

$$\iint_D F(r, z) dz dr = \int_0^1 \left( \int_0^{1-r''} G(r'', z'') |\mathbf{J}_1||\mathbf{J}_2| dz'' \right) dr'' \quad (53)$$

というように変換される．

このように，曲線要素も図 8 に示すような局所座標系に変換できる．

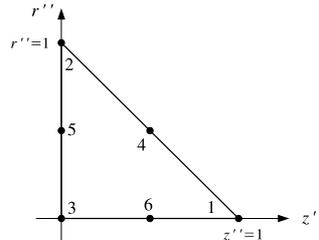


図 8: 局所座標系の曲線要素

## 3 結果

### 3.1 計算の順序

本研究では，前節で導いた式 (17)(18) に基づいた有限要素法をによる軸対称加速空洞の共振周波数および共振モードの電磁場分布を計算できるコードを作成した．特に，本研究の特徴は，有限要素法で使う要素に三角形 2 次要素と曲線 2 次要素を用いた，という点にある．

また，解析領域を設定すると，自動的に要素分割を行うメッシュジェネレータも作成した [3]．このメッシュジェネレータはデローニー三角形分割を任意の 2 次元形状について行うことができる．そしてメッシュジェネレータにより，曲線 2 次要素に対応したメッシュデータが出力される．

実際の計算の順序を以下に示す．

1. メッシュジェネレータにより解析領域を要素分割する
2. メッシュデータを読み込む
3. 一般化固有値問題の行列の値を決定する
4. 共役勾配法で一般化固有値問題を解く
5. 固有値と固有ベクトルから共振周波数と磁場分布を得る
6. 磁場分布から電場分布を計算する
7. 計算結果を出力する
8. 計算結果よりポストプロセッサを使い結果をグラフィックス表示する

このような手順で軸対称加速空洞の解析ができるようになった．

### 3.2 計算結果

作成した計算コードにより任意の形の共振空洞を解析できる．その例として，図 9 に高エネルギー加速器研究機構の PF の空洞 [4] を解析した結果を示す．図 9 は磁場の強さを色で表示し，電気力線を黒い線で表している．磁場の強さは，赤く表示したところをもっとも強く，青く表示したところほど弱くなっている．磁場は，円柱座標形で  $\theta$  方向の成分しか持たないので，このように表示できる．

この空洞の測定された共振周波数は、499.5MHzであった。それに対して本研究で作成されたコードにより計算された共振周波数は、499.557MHzであった。作成したコードに大きな間違いがないことをここで確認した。計算精度の詳細は次節で述べる。

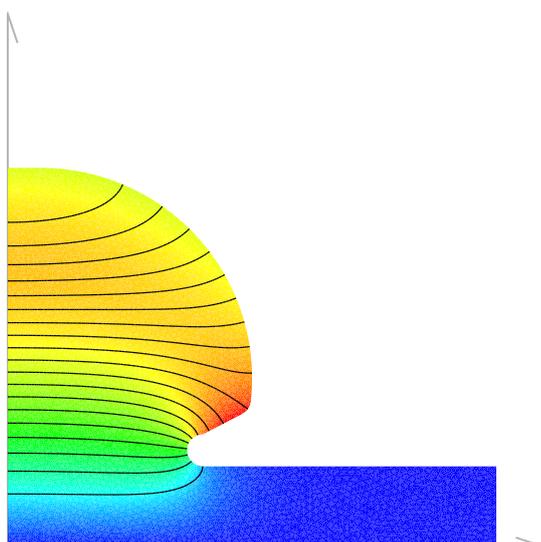


図 9: PF の空洞の計算結果

### 3.3 精度検証

作成したコードの計算誤差を調べるために、すでに解析解が分かっている単純な形の空洞において共振周波数を計算した。

具体的には、半径 1m の球形空洞の固有値を計算した。球形を解析する際は対称性より 4 分の 1 の円領域を解析すればよい。つまり、図 1 に示したような解析領域である。この形は、境界が曲線になっているところもあり、今回の場合の精度検証には適している。

半径 1m の球形空洞の固有値の解析解は、 $(\frac{\omega}{c})^2 = 7.527929582$  である。この値とコードの計算結果を比較した。精度検証に用いた球形空洞の解析結果を図 10,11 に示す。図 10 は磁場の強さを色で表示し、電気力線を黒い線で表している。図 11 は、電場の強さと方向を矢印で表したものである。

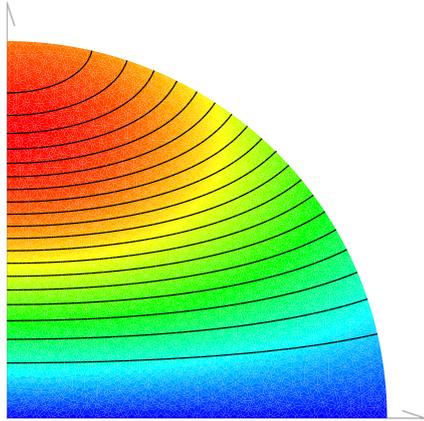


図 10: 磁場の強さと電気力線

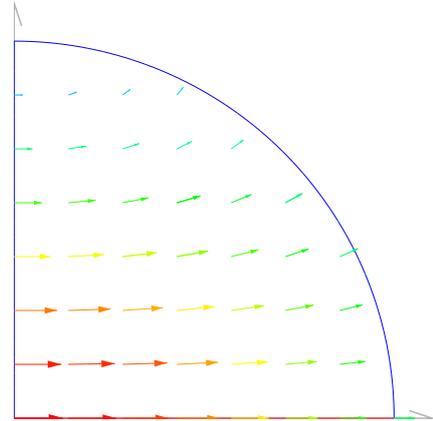


図 11: 電場のベクトル表示

ここでの、誤差を表す  $\delta$  は

$$\delta = \left| \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} \right| \quad (54)$$

$\lambda$ : 計算値  $\lambda_0$ : 解析値

とした。また、加速器設計に用いられることが多い電磁場解析コードの SUPERFISH[2] の誤差も調べ、比較した。

本研究で開発してコードと SUPERFISH の誤差を図 12 に示す。ここで、メッシュサイズとは三角形要素の一边の長さである。図からわかるように SUPERFISH は平均メッシュサイズの 2 乗で誤差が減少しているが、作成したコードは 4 乗で誤差が減少している。つまり、メッシュ面積で考えると SUPERFISH は 1 乗で、作成したコードは 2 乗で誤差が減少している。このことから、計算コードは意図したとおりに動作していると推測している。

ただ、メッシュサイズが 0.013m より小さくなったあたりで、それまで直線的に変化してきた誤差の値が傾向が変化している。つまり、作成したコードでは  $2 \times 10^{-10}$  程度が誤差の限界である。この限界がなにに起因しているのかは不明である。本研究をはじめのあたり、目標とした  $10^{-6}$  よりも十分良い精度が得られていることが分かる。このことから加速器の設計に十分使えるコードと考えている。

計算時間は、もっとも計算精度が高かった 0.014m のメッシュサイズで、200sec ほどだった。ここで、CPU は Pentium4 の 2.8GHz を使用した。

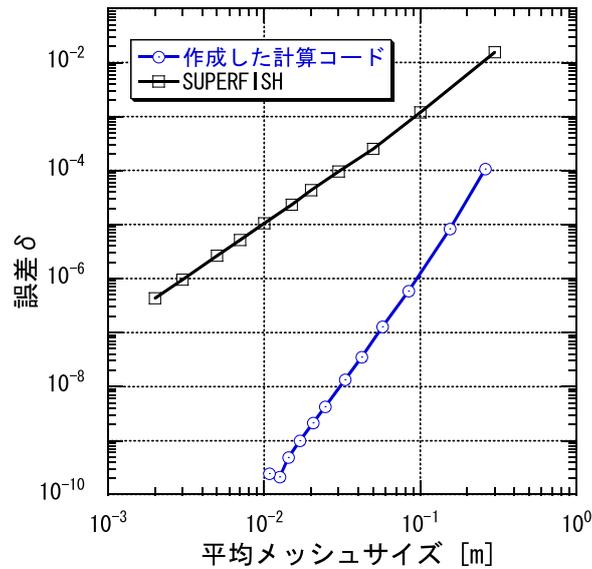


図 12: 計算結果の誤差のグラフ

## 4 考察

本研究では2次要素を使用した有限要素法コードを作成した．その結果，解の収束の速さについて次のことが分かった．

- 1次要素ではメッシュサイズ（面積）の1乗に比例して収束する
- 2次要素ではメッシュサイズ（面積）の2乗に比例して収束する

これは，理論的な裏付けがあると考えられるが，まだその段階に至っていない．しかし，精度検証の結果から2次要素の有用性は明らかとなった．同じメッシュサイズで比較をしてみると，SUPERFISHで $2 \times 10^{-5}$ の精度のとき，作成コードでは $2 \times 10^{-10}$ の精度にいたっている．これより，実用的には十分な精度が得られていると考えている．

## 5 まとめと今後の課題

加速器は様々なシミュレーションを用いて設計を行うが本研究では，加速空洞を設計するための計算コードの開発を行った．加速空洞の設計では，共振周波数および電磁場分布の高い精度が要求される．とくに，共振周波数は高い精度が要求され， $10^{-6}$  程度の周波数の計算精度が必要となる．このため本研究では，従来よりも高い精度の計算コードを目指し開発を進めた．

$10^{-6}$  よりも高い精度の解析を可能にするため，三角形 2 次要素と曲線 2 次要素を使った有限要素法の離散化の式を導き，それを基に計算コードを作成した．計算コードの精度を調べるため，球形空洞の共振周波数を計算し解析値と比較した．その結果，共振周波数の誤差はメッシュサイズの 4 乗（要素面積の 2 乗）に比例し，精度が  $2 \times 10^{-10}$  程度であることを確認した．また，曲線要素を使っているため，複雑な形状においても精度の高い計算結果が得られるだろうと考えられる．今回は，単純な形状での精度検証にとどまったが，今後もっと複雑な形状での精度検証も必要であると考えている．

また，精度検証のところでも触れたがメッシュを細かくするとあるところでそれ以上精度が上がらなくなるところがある．この原因は不明だが，おそらく丸め誤差によるものと予想されるので計算の有効桁数を増やせばさらに精度の高い結果が得られると考えている．

今後の課題として，今のところは周期的境界条件が扱えないのでこの条件を取り入れることがあげられる．また，アダプティブメッシュの採用も考えたい．これができれば，より効率よく精度の高い結果が得られると予想できる．

今の段階では，計算結果の表示は OpenGL を使い磁場分布，電場分布などを表示できるようになってる．また，それをビットマップ形式で保存でき，また，eps 形式で図を描くこともできるようになっている．しかし，実用的な計算コードとして使うには，まだまだインターフェイスの部分で問題があるので，今後は，GUI を充実させて使いやすいものにすべきである．

最後に，本研究で得られたの成果をまとめると以下のようなになる．

- 三角形 2 次要素，曲線 2 次要素を使った有限要素法の離散化式が得られた
- 空洞共振の解析のための有限要素法を使った計算コードをした．コードには三角形 2 次要素および曲線 2 次要素を使用し，結果はグラフィックスで表示できる．
- 計算コードの精度検証の結果，従来よりも非常に高い精度で計算できることが分かった．具体的な精度の値は  $2 \times 10^{-10}$  であった．

## 参考文献

- [1] 小柴正則, ”光・波動のための有限要素法の基礎”, 森北出版株式会社, 2002
- [2] K.Halbach, et al, ”SUPERFISH - A Compute Program for Evaluation of RF cavities with Cylindrical Symmetry”, Particle Accelerators 7 (4), 1976
- [3] 谷口健男, ”FEMのための要素自動分割”, 森北出版株式会社, 2002
- [4] Y. Yamazaki et al, ”MEASUREMENT OF THE LONGITUDINAL AND TRANSVERSE COUPLING IMPEDANCES OF THE HIGHER-ORDER MODES OF THE RE-ENTRANT ACCELERATING CAVITY”, KEK 80