

平成16年度 卒業研究報告書

有限要素法による静磁場解析の 基礎的研究

秋田工業高等専門学校 電気工学科

研究者名 小玉 豊久

指導教員名 山本 昌志

要旨

電磁石は様々な用途に多様な形のものが使われている．この設計では電磁石が作る磁場を解析することは重要である．ここでは加速器や電子顕微鏡に用いられる軸対称の電磁石が作り出す磁場を解析するために，有限要素法の基礎的研究を行いそれをもとに解析用プログラムの作成した．マクスウェルの方程式より，静磁場が満たす微分方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (2)$$

$$(3)$$

である．軸対称構造であるから円柱座標系を用いて，電流は θ 方向のみとし，作られる磁場は r 方向と z 方向である．この場合ベクトルポテンシャルを θ 方向のみにとることができる．このベクトルポテンシャル A_θ を求め，その回転から磁場を求めることにする．これらをふまえたうえで上式の汎関数は

$$\begin{aligned} F[A_\theta] &= \int \left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{A_\theta}{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right)^2 - j_\theta A_\theta \right] dV \\ &= \int \left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{A_\theta}{r} \right)^2 - j_\theta A_\theta \right] 2\pi r dr dz \quad (4) \end{aligned}$$

である．この変分を 0 とするベクトルポテンシャルが先の微分方程式の解であり，この関数を細かく分けられた領域ごとに近似式で表わし，これを足しあって全体を解析するのが有限要素法である．実際には計算領域を三角形のメッシュで細かく区切り，この離散化された微小領域ごとに方程式を作る．このようにすると汎関数をゼロにする式は連立方程式に還元される．ここではこの連立一次方程式を SOR 法によって計算した．この離散化された方程式と計算プログラムの作成が本研究のテーマである．作成したプログラムを用いて磁気レンズの解析を行った．その結果として磁場の分布が得られたが精度の面で課題が残った．三角形の数を増やすと精度は上がるが，計算速度は下がってしまう．これを改善するために SOR 法で計算する際，行列に数多くある 0 の要素を読み飛ばす必要がある．また今回は簡易化した磁気レンズをモデルに解析を行ったがより精密なモデルを解析し精度の検証が必要であろう．さらに精度を上げるためには 2 次要素を導入することも考えたい．解析能力自体の発展として磁場強度のよって動的に透磁率を取り扱えるようにすることなどが今後の課題として残る．

目次

第1章	序論	1
第2章	有限要素法による静磁場解析の理論	2
2.1	マクスウェルの方程式	2
2.2	ベクトルポテンシャル	2
2.3	汎関数	3
2.4	軸対称問題	4
2.5	離散化	5
2.6	ベクトルポテンシャルから磁場の計算	8
第3章	数値計算	10
3.1	プログラムの概要	10
第4章	計算結果	11
第5章	まとめ	13
付録A	計算プログラム	16

第1章 序論

電磁場の解析は設計、開発の上できわめて重要である。そこで当研究室では電磁場を解析するプログラムの開発を研究のテーマとした。この研究はその中の磁場を解析するプログラムである。電磁石には目的に応じて、いろいろな形のものが使われている。ここでは、図 1.1 に示すような、軸対称性を持った磁石の解析を行う。この例で示した磁石は、磁気レンズと呼ばれ、電子顕微鏡や加速器の電子ビームを収束するために使われている。

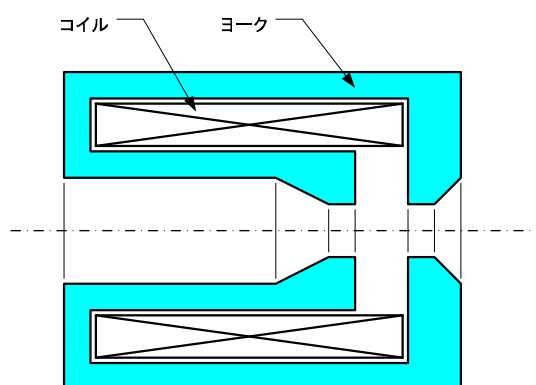


図 1.1: 磁気レンズ

第2章 有限要素法による静磁場解析の理論

2.1 マクスウェルの方程式

電磁現象を記述する微分方程式は、マクスウェルの方程式と呼ばれ

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

と書かれる4組の連立の微分方程式である。ここで、

記号	物理量	単位	スカラー/ベクトル
D	電束密度	[C/m ²]	ベクトル
B	磁束密度	[T] あるいは [Wb/m ²]	ベクトル
H	磁場 (の強さ)	[A/m]	ベクトル
E	電場 (の強さ)	[V/m]	ベクトル
ρ	電荷密度	[C/m ³]	スカラー
j	電流密度	[A/m ²]	ベクトル

である。物質中では、

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.7)$$

という関係で結びつけられている。ここで、 ϵ は誘電率、 μ は透磁率、 σ 導電率である。

2.2 ベクトルポテンシャル

軸対称問題では、ベクトルポテンシャルを使う方が式が簡単になる。ベクトルポテンシャル A の定義は、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.8)$$

である。これと式 (2.6) から、直ちに

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.9)$$

が分かる。この式の両辺に回転の演算を施し、式(2.3)を使うと

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{j} \quad (2.10)$$

が得られる。これが、ベクトルポテンシャルが満たす偏微分方程式である。実際の磁場は、このベクトルポテンシャルを計算して、微分(回転)することにより得られる。

2.3 汎関数

式(2.10)の汎関数は

$$F[\mathbf{A}] = \int \left[\frac{1}{2\mu} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right] dV \quad (2.11)$$

である。

この式の第一変分 δF を計算し、それがゼロになる条件を考えることにする。第一変分は、 \mathbf{A} を $\delta \mathbf{A}$ 変化させたときの微小変化量で

$$\begin{aligned} \delta F &= F[\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}] - F[\mathbf{A}] \\ &= \int \left[\frac{1}{2\mu} \{ \nabla \times (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \} \cdot \{ \nabla \times (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \} - \mathbf{j} \cdot (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \right] dV \\ &\quad - \int \left[\frac{1}{2\mu} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right] dV \\ &= \int \left[\frac{1}{2\mu} \left\{ (\nabla \times \mathbf{A})^2 + 2(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) + (\nabla \times \delta \mathbf{A})^2 \right\} - \mathbf{j} \cdot (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \right] dV \\ &\quad - \int \left[\frac{1}{2\mu} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right] dV \\ &\quad \text{2次の微少量を無視すると} \\ &= \int \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) - (\delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) \right] dV \\ &\quad \text{ベクトル恒等式 } \nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \mathbf{W} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) - \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) \text{ を上手につかう} \\ &\quad \mathbf{V} = 1/\mu(\nabla \times \mathbf{A}), \mathbf{W} = \delta \mathbf{A} \text{ とする。} \\ &= \int \left[-\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A} \right\} + \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \right\} - (\delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) \right] dV \\ &\quad \text{この式の第1項に発散定理を使い、式を整理すると} \\ &= - \int \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \times \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \int \left[\left\{ \nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{j} \right\} \cdot \delta \mathbf{A} \right] dV \quad (2.12) \end{aligned}$$

となる。

任意の $\delta \mathbf{A}$ に対して、この第一変分 δF がゼロになる条件を考える。そのためには、式(2.12)の右辺の第1項と第2項の被積分関数がともにゼロになる必要がある。まず、第1項であるが、それは

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} = 0 \quad (2.13)$$

$$\delta \mathbf{A} = 0 \quad (2.14)$$

のいずれかである。最初の条件はノイマン条件で、何も境界条件を指定しなければ、磁場は境界と垂直になる。2番目のものは、境界でのベクトルポテンシャルを指定するディレクレ条件である。即ち、第一変分の右辺第1項は境界条件を表すのである。

次に、第2項であるが、これは計算している領域で

$$\nabla \times \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{j} = 0 \quad (2.15)$$

となる必要がある。これは、ベクトルポテンシャルを用いた静磁場のマクスウェルの方程式そのもので、式(2.10)と等しい。

以上のことから、静磁場を計算するためには、式(2.11)の第一変分をゼロにすればよいことが分かる。静磁場のマクスウェルの方程式は、式(2.11)の第1変分をゼロにするのと等しいのである。なおこの章は[1]を参考にした。

2.4 軸対称問題

今回、磁石の形状は完全軸対称で、電流は $\hat{\theta}$ 方向のみに流れる事にする。すると、作られる磁場は \hat{r} と \hat{z} 方向である。この場合、ベクトルポテンシャルを $\hat{\theta}$ 方向のみにとることができる。従って、 H_r と H_z を計算するより、 A_θ を計算して、その回転から磁場を求める方が簡単である。

静磁場の汎関数は式(2.11)で示したとおりである。この式にはベクトルポテンシャルの回転の演算が含まれる。円柱座標系の回転は、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{r} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{z} \quad (2.16)$$

である。ここでは、ベクトルポテンシャルは A_θ のみであるため

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left[-\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) \right] \hat{z} \\ &= \left(-\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{A_\theta}{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right) \hat{z} \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる。

この回転の結果を汎関数の式(2.11)に適用すると、

$$\begin{aligned} F[A_\theta] &= \int \left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{A_\theta}{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right)^2 - j_\theta A_\theta \right] dV \\ &= \int \left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{A_\theta}{r} \right)^2 - j_\theta A_\theta \right] 2\pi r dr dz \end{aligned} \quad (2.18)$$

となる。

2.5 離散化

式 (2.18) をコンピュータで解くためには式 (2.19) で示す形の行列に変形する必要がある。

$$\mathbf{K} \mathbf{A}_\theta = \mathbf{M} \quad (2.19)$$

上に示す行列で表すための汎関数の変形を以下に示す。式 (2.18) を変形する。 A_θ を u とおき、また 2π は省略する。

$$J = \frac{1}{2\mu} \iint_D r \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} drdz + \frac{1}{\mu} \iint_D u \frac{\partial u}{\partial r} drdz + \frac{1}{2\mu} \iint_D \frac{u^2}{r} drdz - j_\theta \iint_D r u drdz \quad (2.20)$$

この式の積分領域を、三角形 1 次要素に分割して計算する。ここで、節点番号 i, j, k を持つ三角形において、番号 i の点での u を u_i と表すことにする。すると上の式は、全三角形要素 (I)、(J)、 \dots) の和で次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J[u]}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} & \left[\frac{1}{2\mu} \iint_{(I)} r \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} drdz + \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} u \frac{\partial u}{\partial r} drdz \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\mu} \iint_{(I)} \frac{u^2}{r} drdz - j_\theta \iint_{(I)} r u drdz \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\frac{1}{2\mu} \iint_{(J)} r \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} drdz + \frac{1}{\mu} \iint_{(J)} u \frac{\partial u}{\partial r} drdz \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\mu} \iint_{(J)} \frac{u^2}{r} drdz - j_\theta \iint_{(J)} r u drdz \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$+ \dots \quad (2.23)$$

特に、要素 (I) の寄与による項のみを書き出す。

$$\left. \frac{\partial J[u]}{\partial u_i} \right|_{(I)} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\frac{1}{2\mu} \iint_{(I)} r \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} drdz + \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} u \frac{\partial u}{\partial r} drdz \right. \quad (2.24)$$

$$\left. + \iint_{(I)} \frac{u^2}{r} drdz - j_\theta \iint_{(I)} r u drdz \right] \quad (2.25)$$

上式の積分を一つ一つ計算していく。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(I)} r \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} drdz &= \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} r drdz \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) u_i \\ &+ \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} r drdz \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) u_j \\ &+ \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} r drdz \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_k}{\partial r} + \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) u_k \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(I)} u \frac{\partial u}{\partial r} dr dz &= \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} \left(\phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) dr dz u_i \\
&+ \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} \left(\phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) dr dz u_j \\
&+ \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} \left(\phi_i \frac{\partial \phi_k}{\partial r} + \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) dr dz u_k
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(I)} \frac{u^2}{r} dr dz = \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} \frac{1}{r} \phi_i \phi_i dr dz u_i + \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} \frac{1}{r} \phi_i \phi_j dr dz u_j + \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} \frac{1}{r} \phi_i \phi_k dr dz u_k \tag{2.28}$$

$$\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_{(I)} r u^2 dr dz = \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} r \phi_i \phi_i dr dz u_i = \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} r \phi_i \phi_j dr dz u_j = \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} r \phi_i \phi_k dr dz u_k \tag{2.29}$$

これを元に行列の要素を決めると以下ようになる。

$$k_{ij}|_{(I)} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \iint_{(I)} r dr dz + \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} \left(\phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) dr dz + \frac{1}{\mu} \iint_{(I)} \frac{1}{r} \phi_i \phi_j dr dz \tag{2.30}$$

$$m_i|_{(I)} = j_\theta \iint_{(I)} r \phi_i dr dz \tag{2.31}$$

ここで、 ϕ は三角形内部を 1 次近似するための関数で、

$$\phi_i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & z & r \\ 1 & z_j & r_j \\ 1 & z_k & r_k \end{vmatrix} \tag{2.32}$$

Δ は三角形の面積の 2 倍で、

$$\Delta = r_i z_j + r_j z_k + r_k z_i - z_i r_j - z_j r_k - z_k r_i \tag{2.33}$$

となる。さらに積分を計算する。これらの式の積分範囲は三角形要素の内部である。例として図 2.1 のような三角形で考える。三角形の各辺を 1 次関数 f_a 、 f_b 、 f_c で表すと、次のように書ける。

$$f_a = \frac{r_3 - r_2}{z_3 - z_2} (z - z_2) + r_2 \tag{2.34}$$

$$f_b = \frac{r_1 - r_2}{z_1 - z_2} (z - z_2) + r_2 \tag{2.35}$$

$$f_c = \frac{r_3 - r_1}{z_3 - z_1} (z - z_1) + r_1 \tag{2.36}$$

よって、三角形内部の積分範囲は次のようになる。

$$\iint dr dz = \int_{z_2}^{z_1} \int_{f_a}^{f_b} dr dz + \int_{z_1}^{z_3} \int_{f_a}^{f_c} dr dz \tag{2.37}$$

これにしたがって、積分を計算していく。

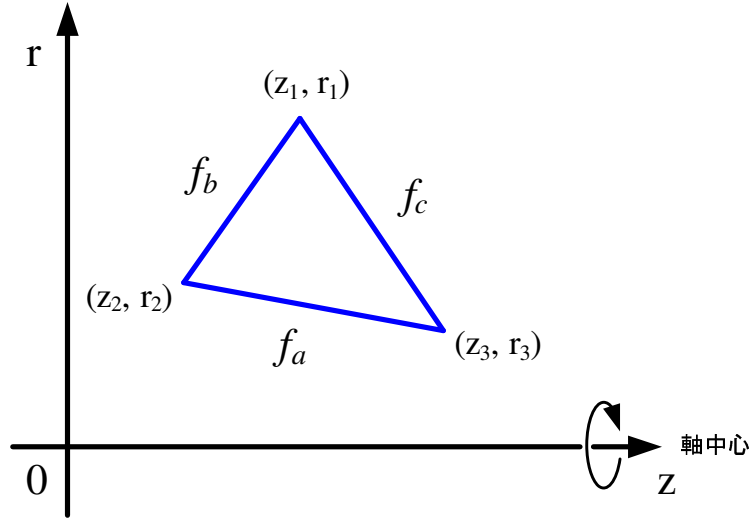


図 2.1: 積分する三角形領域

$$\frac{1}{\mu} \iint_{(I)} r \, dr dz \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) = \frac{1}{6\mu\Delta} (r_i + r_j + r_k) [(z_j - z_k)(z_k - z_i) + (r_j - r_k)(r_k - r_i)] \quad (2.38)$$

$$\iint_{(I)} \left(\phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) dr dz = \frac{z_j - z_k}{6\mu} + \frac{z_k - z_i}{6\mu} \quad (2.39)$$

次の計算は少し近似の計算をする。 r_0 は三角形の重心座標なので $r_0 = (r_i + r_j + r_k)/3$ である。

$$\begin{aligned} \iint_{(I)} \frac{1}{r} \phi_i \phi_i dr dz &= \frac{1}{r_0} \iint_{(I)} \phi_i \phi_i dr dz \\ &= \begin{cases} \frac{1}{r_0} \frac{1}{24\mu\Delta} & (i \neq j) \\ \frac{1}{r_0} \frac{1}{12\mu\Delta} & (i = j) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\iint_{(I)} r \phi_i \phi_j dr dz = \begin{cases} \frac{1}{120\mu} (2r_i + 2r_j + r_k) \Delta & (i \neq j) \\ \frac{1}{60\mu} (3r_i + r_j + r_k) \Delta & (i = j) \end{cases} \quad (2.41)$$

以上の計算より、行列 K および M は

$$\begin{aligned}
 k_{ii}|_{(I)} &= \frac{1}{6\mu\Delta}(r_i + r_j + r_k)[(z_j - z_k)^2 + (r_j - r_k)^2] \\
 &\quad + \frac{z_j - z_k}{3} \\
 &\quad + \frac{1}{r_0} \frac{1}{12\mu\Delta}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
 k_{ij}|_{(I)} &= \frac{1}{6\mu\Delta}(r_i + r_j + r_k)[(z_j - z_k)(z_k - z_i) + (r_j - r_k)(r_k - r_i)] \\
 &\quad + \frac{z_j - z_k}{6} + \frac{z_k - z_i}{6} \\
 &\quad + \frac{1}{r_0} \frac{1}{24\mu\Delta}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$m_i|_{(I)} = j\theta \frac{1}{3}\Delta \tag{2.44}$$

として決定できる。

2.6 ベクトルポテンシャルから磁場の計算

ベクトルポテンシャルの回転から求められる磁場は、

$$H_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \tag{2.45}$$

$$H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) \tag{2.46}$$

である。

有限要素法では、図 2.2 に示すように、三角形要素の頂点でベクトルポテンシャル A_θ の値を計算する。これら 3 つのベクトルポテンシャルから、要素内の磁場 H_r と H_z を求めなくてはならない。まず初めに、要素内の任意の位置でのベクトルポテンシャルを計算する式を導く。今のところ、我々の計算は 1 次近似なので、要素内のベクトルポテンシャルは

$$A_\theta(z, r) = \alpha + \beta z + \gamma r \tag{2.47}$$

となる。

この要素内のベクトルポテンシャルの値を用いて、領域内の磁場を計算することにする。これは簡単で、式 (2.47) を用いて、式 (2.45) と (2.46) を評価すれば良い。これらから

$$H_r = -\beta \tag{2.48}$$

$$H_z = \frac{\alpha + \beta z}{r} + 2\gamma \tag{2.49}$$

を導くことができる。

残りの問題は、ベクトルポテンシャルを 1 次近似した係数 α と β 、 γ を求めることである。これが分かれば、要素内の任意の位置での磁場が計算できる。三角形要素の頂点の座標とベクトルポテンシャルの有限要素法の計算結果によりが分かっているので、これら 3 つの係数を決定するこ

とは可能である。これら 3 点では

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\theta i} \\ A_{\theta j} \\ A_{\theta k} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

の関係がある。ここで、 (x_i, y_i) と (x_j, y_j) 、 (x_k, y_k) は頂点の座標、 $A_{\theta i}$ と $A_{\theta j}$ 、 $A_{\theta k}$ はその位置のベクトルポテンシャルである。この連立方程式から、1 次近似の係数は

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{\theta i} \\ A_{\theta j} \\ A_{\theta k} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

と計算できる。

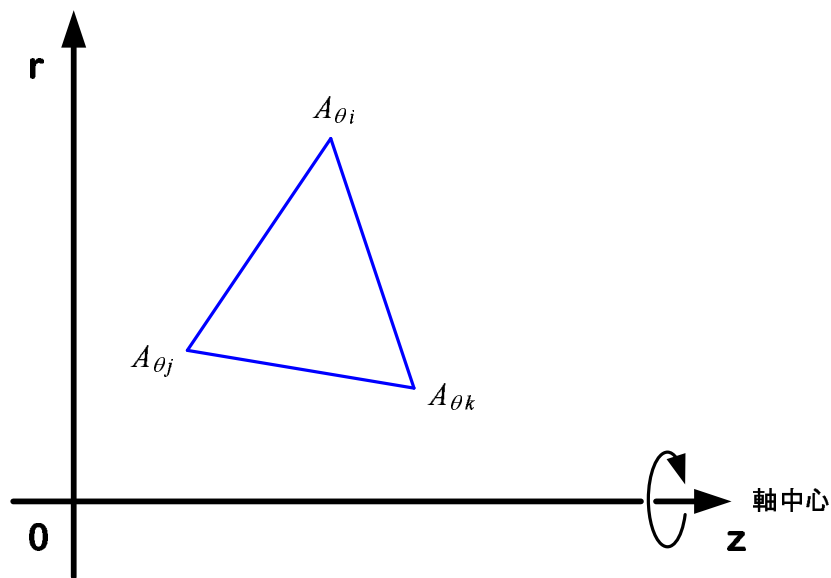


図 2.2: 三角形要素とベクトルポテンシャル

第3章 数値計算

3.1 プログラムの概要

実際に有限要素法で磁場の解析をプログラムによって行う流れを以下に示す。

- 領域を三角形に分ける。
- 分けられた三角形から、その座標、境界値、電流密度などのデータを得る。
- それらのデータを式 (2.43) 、(2.44) に適用し、解くべき連立方程式を得る。
- 連立方程式を解き、解としてベクトルポテンシャルを得る。
- 上で得た解に、前章 6 節の過程を経て磁場の値を得る。

このような流れのプログラムを C++ を使用して作成した。なお、連立方程式の解法は SOR 法 [2] でありその構造は付録のプログラムを参考にしてほしい。

第4章 計算結果

結果の図を以下に示す。図 4.1 はベクトルポテンシャルの強弱を表し白から黒にかけて値が小さくなっていくのが解る。また図 4.2 は磁力線の様子を表している。

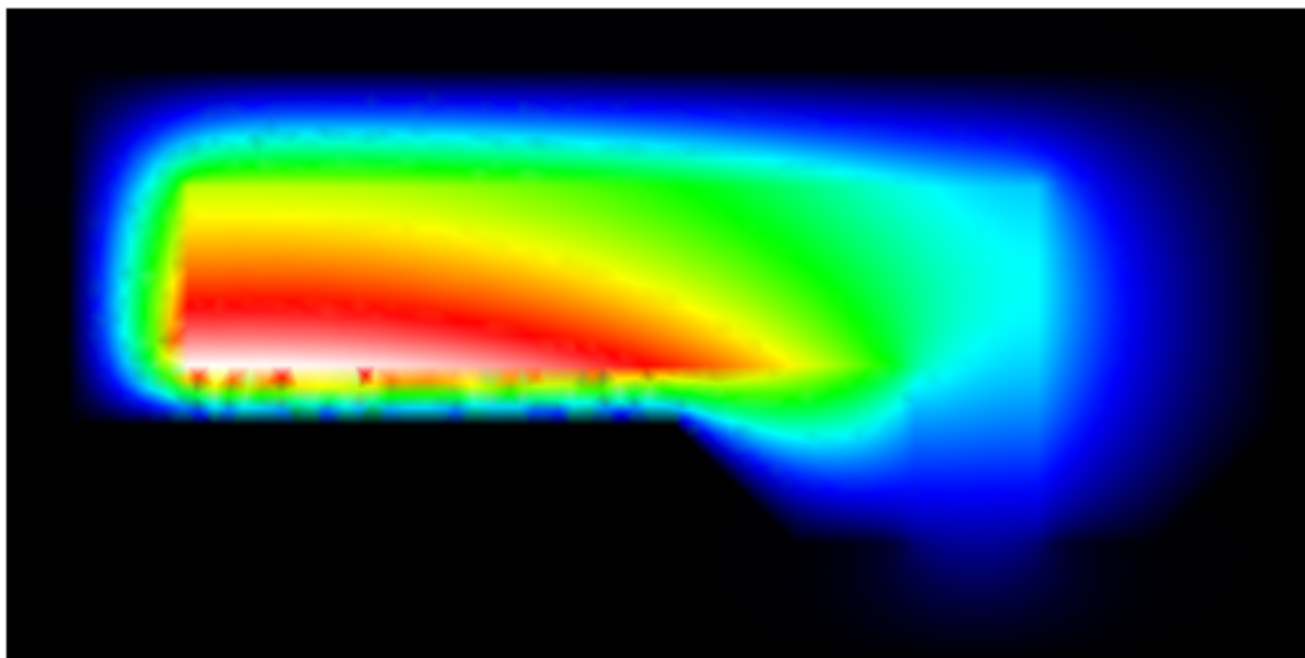


図 4.1: 磁気レンズのベクトルポテンシャルの分布

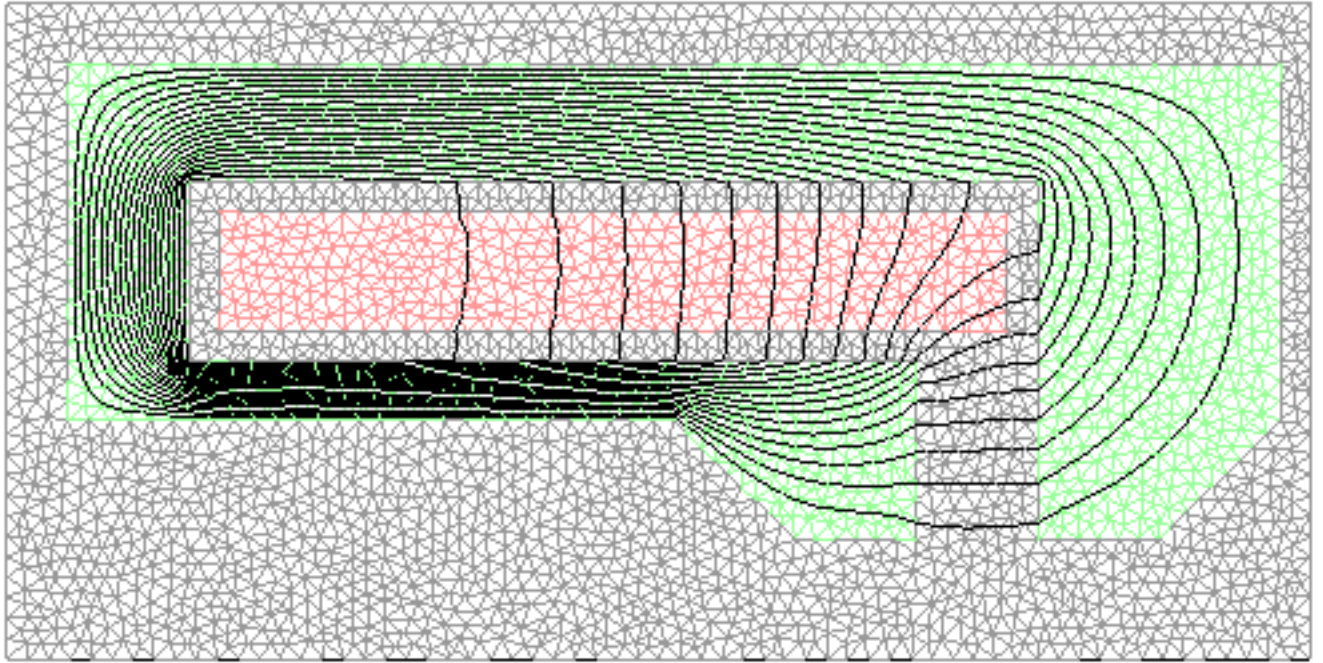


図 4.2: 磁気レンズが作り出す磁場

第5章 まとめ

今回の研究の成果として磁場の分布を求めるプログラムを作成することができた。しかし精度の検証などはなされていない。それも含め以上の課題が残る。

- 精度の検証 (市販のプログラムとの比較、単純な構造の解析など)
- 精度の向上 (二次要素の導入、アダプティブメッシュの使用)
- 操作性の向上

今回は三角形内部を一次近似したわけだがそれを二次近似する事によって精度が向上すると考えられる。またアダプティブメッシュとは値の変化の緩急に合わせて三角形の大きさを変えるという方法である。

関連図書

- [1] 戸川隼人. 変分法と有限要素法. 現代応用数学の基礎. 日本評論社, 1994.
- [2] 戸川隼人. マトリクスの数値計算. オーム社, 1979.

謝辞

ご指導してくださった担当教官の山本昌志先生、様々な面で協力してくださった専攻科の夏井拓也さん、宮田翔吾さんに感謝の意を表します。

付録A 計算プログラム

```
#include <stdio.h>
#include <vector>
#include <math.h>
#include "laplace.h"
#define N 8000
using namespace std;

void sor(int n, vector < vector <double> > a, double b[],double u[]);

void rot(int nel, int node,
         int mtj[][4],double px[], double py[],
         double u[], double Hr[], double Hz[]);

void syutsuryoku(int node,double u[],double Hr[],double Hz[]);

/*-----*/

int main(){
/*-----*/
vector < vector <double> > A;
int i,j,k;
double d[N],u[N],Hr[N],Hz[N],mu[N];
    int nel, node;
    int mtj[N][4], jac[N][4], idm[N];
    double px[N], py[N],triangle,xm,pai,jc;
    int pt_bc_k[N];
    double pt_bc_v[N];
    double x1, x2, x3, y1, y2, y3;

    pai = 4*atan(1);
        jc = 1000;
A.resize(N);
    for( i=0; i <=N-1; i++){
        A[i].resize(N);
    }
}
```

```

/*=====*/
/* 初期化 */
/*=====*/
    for( i=0; i <=N-1; i++){
        for( j=0; j <=N-1; j++){
            A[i][j]=0;
        }
    }

    for( i=0; i <=N-1; i++){
        d[i] =0;
        u[i] =1;
Hr[i] =0;
Hz[i] =0;
mu[i] =1;
    }

/*-----*/

    read_data(&nelm, &node, mtj, jac, idm, px, py, pt_bc_k, pt_bc_v, "sample4");

    for(i=1; i <=nelm; i++){
        x1=px[mtj[i][1]]; /*z=x r=y*/
        y1=py[mtj[i][1]];
        x2=px[mtj[i][2]];
        y2=py[mtj[i][2]];
        x3=px[mtj[i][3]];
        y3=py[mtj[i][3]];

/*-----材質判断-----*/
        if(idm[i] == 2){
            mu[i] = 5000;
        }
/*-----*/

        triangle=((x2-x1)*(y3-y1)-(x3-x1)*(y2-y1));
        xm=(x1+x2+x3)/3.0;

        A[mtj[i][1]][mtj[i][1]] += (((x2-x3)*(x2-x3)+(y2-y3)*(y2-y3))*xm/triangle
            +2*(y2-y3)/3.0+2*triangle/(12*xm))/mu[i];

```

```

A[mtj[i][1]][mtj[i][2]] += (((x3-x1)*(x2-x3)+(y3-y1)*(y2-y3))*xm/triangle
                             +(y2-y1)/3.0+triangle/(12*xm))/mu[i];
A[mtj[i][1]][mtj[i][3]] += (((x1-x2)*(x2-x3)+(y1-y2)*(y2-y3))*xm/triangle
                             +(y1-y3)/3.0+triangle/(12*xm))/mu[i];
if(idm[i] == 3){d[mtj[i][1]]=triangle*jc/3.0;}

A[mtj[i][2]][mtj[i][1]] += (((x3-x1)*(x2-x3)+(y3-y1)*(y2-y3))*xm/triangle
                             +(y2-y1)/3.0+triangle/(12*xm))/mu[i];
A[mtj[i][2]][mtj[i][2]] += (((x3-x1)*(x3-x1)+(y3-y1)*(y3-y1))*xm/triangle
                             +2*(y3-y1)/3.0+2*triangle/(12*xm))/mu[i];
A[mtj[i][2]][mtj[i][3]] += (((x3-x1)*(x1-x2)+(y3-y1)*(y1-y2))*xm/triangle
                             +(y3-y2)/3.0+triangle/(12*xm))/mu[i];
if(idm[i] == 3){d[mtj[i][2]]=triangle*jc/3.0;}

A[mtj[i][3]][mtj[i][1]] += (((x1-x2)*(x2-x3)+(y1-y2)*(y2-y3))*xm/triangle
                             +(y1-y3)/3.0+triangle/(12*xm))/mu[i];
A[mtj[i][3]][mtj[i][2]] += (((x1-x2)*(x3-x1)+(y1-y2)*(y3-y1))*xm/triangle
                             +(y3-y2)/3.0+triangle/(12*xm))/mu[i];
A[mtj[i][3]][mtj[i][3]] += (((x1-x2)*(x1-x2)+(y1-y2)*(y1-y2))*xm/triangle
                             +2*(y1-y2)/3.0+2*triangle/(12*xm))/mu[i];
if(idm[i] == 3){d[mtj[i][3]]=triangle*jc/3.0;}

}

/*=====*/
/* 境界条件 */
/*=====*/
for(i=1; i <= nelm; i++){
  for(j=1; j <=3; j++){
    if(pt_bc_k[mtj[i][j]] == 1){
      for(k=1; k <= node; k++){
        A[mtj[i][j]][k]=0;
        if(mtj[i][j] == k){
          A[mtj[i][j]][k]=1;
        }
      }
      d[mtj[i][j]]=pt_bc_v[mtj[i][j]];
    }
  }
}

```

```

    }

/*-----*/

/* for(i=1; i <=node; i++){
    for(j=1; j<=node; j++){
if(fabs(i-j)<5){
printf("A[%d] [%d]=%lf\n",i,j,A[i][j]);}} } */

/*=====*/
/*= ベクトルポテンシャルを求める =*/
/*=====*/
    sor(node,A,d,u);
/*      for(i=1; i <=node; i++){
        printf("%lf %lf %lf\n",px[i], py[i],u[i]);
        }
*/
/*=====*/
/*=          磁場を求める =*/
/*=====*/
    rot(nelm, node, mtj, px, py, u, Hr, Hz);

/*      for(i=1; i <=node; i++){
        printf("%lf %lf %lf %lf\n",px[i], py[i],Hr[i],Hz[i]);
        }*/

syutsuryoku(node,u ,Hr ,Hz);

    return(0);
}

/*-----SOR法-----*/
void sor(int n, vector < vector <double> > a, double b[],double u[]){

    int i,j,k,l;
    double inv_a,u1[N],w;

    l = 1;
    w = 1.8475;

for(k=1; k<=200 ; k++){
printf("%d\n",k);

```

```

for(i=1; i<=n ; i++){
  inv_a = 1.0/a[i][i];
  u1[i] = b[i];
  for(j=1 ; j<=n ; j++){
    if(i != j){
      u1[i] -= a[i][j]*u[j];
    }
  }
  u1[i] *= inv_a;
  u[i] += w*(u1[i]-u[i]);
}

}

}

/*-----回転により磁場を求める関数-----*/
void rot(int nelm, int node,int mtj[][4],
double px[], double py[],
double u[], double Hr[], double Hz[]){

int i;
int add[10000];
double xi,xj,xk,yi,yj,yk;
double delta,al,be,gan;

for(i=1 ;i<=node ;i++ ){
add[i] = 0;
}

for(i=1; i<=nelm ;i++){

xi=px[mtj[i][1]];
      yi=py[mtj[i][1]];
      xj=px[mtj[i][2]];
      yj=py[mtj[i][2]];
      xk=px[mtj[i][3]];
      yk=py[mtj[i][3]];

delta = (xj-xi)*(yk-yi) - (yj-yi)*(xk-xi);
al = (xj*yk-yj*xk)*u[mtj[i][1]] + (xi*yk-yi*xk)*u[mtj[i][2]] + (xi*yj-yi*xj)*u[mtj[i][3]];
be = -((yk-yj)*u[mtj[i][1]] + (yi-yk)*u[mtj[i][2]] + (yi-yj)*u[mtj[i][3]]);
gan = (xk-xj)*u[mtj[i][1]] + (xi-xk)*u[mtj[i][2]] + (xi-xj)*u[mtj[i][3]];

if(xi != 0.0 && xj != 0.0 && xk != 0.0){

```

```

Hr[mtj[i][1]] += -be;
Hz[mtj[i][1]] += (a1+be*yi)/xi+2*gan;

Hr[mtj[i][2]] += -be;
Hz[mtj[i][2]] += (a1+be*yj)/xj+2*gan;

Hr[mtj[i][3]] += -be;
Hz[mtj[i][3]] += (a1+be*yk)/xk+2*gan;

add[mtj[i][1]] += 1;
add[mtj[i][2]] += 1;
add[mtj[i][3]] += 1;

}

if(xi == 0.0 && xj != 0.0 && xk != 0.0){
Hr[mtj[i][1]] += 0;
Hz[mtj[i][1]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][2]] += -2*be;
Hz[mtj[i][2]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][3]] += -2*be;
Hz[mtj[i][3]] += 2*gan;

add[mtj[i][1]] += 1;
add[mtj[i][2]] += 1;
add[mtj[i][3]] += 1;
}

if(xi != 0.0 && xj == 0.0 && xk != 0.0){
Hr[mtj[i][1]] += -2*be;
Hz[mtj[i][1]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][2]] += 0;
Hz[mtj[i][2]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][3]] += -2*be;
Hz[mtj[i][3]] += 2*gan;

add[mtj[i][1]] += 1;

```



```

add[mtj[i][2]] += 1;
add[mtj[i][3]] += 1;
}

if(xi != 0.0 && xj != 0.0 && xk == 0.0){
Hr[mtj[i][1]] += -2*be;
Hz[mtj[i][1]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][2]] += -2*be;
Hz[mtj[i][2]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][3]] += 0;
Hz[mtj[i][3]] += 2*gan;

add[mtj[i][1]] += 1;
add[mtj[i][2]] += 1;
add[mtj[i][3]] += 1;
}

if(xi != 0.0 && xj == 0.0 && xk == 0.0){
Hr[mtj[i][1]] += 0;
Hz[mtj[i][1]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][2]] += 0;
Hz[mtj[i][2]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][3]] += 0;
Hz[mtj[i][3]] += 2*gan;

add[mtj[i][1]] += 1;
add[mtj[i][2]] += 1;
add[mtj[i][3]] += 1;
}

if(xi == 0.0 && xj != 0.0 && xk == 0.0){
Hr[mtj[i][1]] += 0;
Hz[mtj[i][1]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][2]] += 0;
Hz[mtj[i][2]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][3]] += 0;

```

```

Hz[mtj[i][3]] += 2*gan;

add[mtj[i][1]] += 1;
add[mtj[i][2]] += 1;
add[mtj[i][3]] += 1;
}

if(xi == 0.0 && xj == 0.0 && xk != 0.0){
Hr[mtj[i][1]] += 0;
Hz[mtj[i][1]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][2]] += 0;
Hz[mtj[i][2]] += 2*gan;

Hr[mtj[i][3]] += 0;
Hz[mtj[i][3]] += 2*gan;

add[mtj[i][1]] += 1;
add[mtj[i][2]] += 1;
add[mtj[i][3]] += 1;
}
}

for(i=1 ;i<=node ;i++ ){
Hr[i] /= add[i];
Hz[i] /= add[i];
}
}
/*-----ファイルに出力する関数-----*/
void syutsuryoku(int node,double u[],double Hr[],double Hz[]){

int i;

FILE *filename;

filename = fopen("sample4.field","w");

fprintf(filename,"$field\n");
for(i=1;i<=node;i++){
fprintf(filename,"%d\t%e\t%e\t%e\n",i,u[i],Hr[i],Hz[i]);
}
fprintf(filename,"$end");
fclose(filename);

```

