

平成16年度 卒業研究報告書

有限要素法による静電場解析の 基礎的研究

秋田工業高等専門学校 電気工学科

研究者名 遠藤 信二

指導教員名 山本 昌志

要旨

一般に、高電圧機器を設計する際、その表面電場をできるだけ小さくすることが重要となる。そのため、コンピュータシミュレーションにより機器の電場を求めることが行われている。本研究では、有限要素法を用いた軸対称構造の静電場を求めるための基礎的研究とプログラムの作成を行った。

静電場を記述する方程式は、時間の項をゼロとしたマクスウェルの方程式から求められ、

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = -\rho \quad (1)$$

となる。ここで、 ε は誘電率、 ϕ はポテンシャル、 ρ は電荷密度である。また、誘電率は一定と考えた場合は、それは微分には関係なくなり、上式はポアソン方程式と呼ばれる形になる。ここでは軸対称構造について、その方程式の解となる静電場を求めることにした。この場合、先のスカラーポテンシャルの微分方程式に対応する汎関数は、

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z} \quad (2)$$

となる。本研究では電荷がなく、は一定とした場合のラプラス方程式を解くことにした。これによって、その積分は静電場のエネルギーを示す式となる。ラプラス方程式の解は、この汎関数の第一変分が零の場合である。有限要素法では、上式の汎関数を離散化し、計算する領域を三角形の微小領域に区切り計算する。そうすると、先の汎関数の第一変分を零とする式は、連立一次方程式に還元される。本研究では、それをガウス-ザイデル法によってスカラーポテンシャルの解を求めることにした。作成されたプログラムを用いて、高電圧機器である電子銃の静電場を計算した。現状では、スカラーポテンシャルを計算できるようになったが、

- 解析精度の検証
- 解析精度の向上
- 電子ビームの軌道計算

などの課題がある。

目次

第 1 章	序論	1
第 2 章	有限要素法による静電場解析の理論	2
2.1	マクスウェルの方程式	2
2.2	汎関数	3
2.3	離散化	4
2.4	ポテンシャルから電場の計算	6
第 3 章	数値計算	8
3.1	プログラムの概要	8
3.2	連立方程式の計算方法	8
第 4 章	計算結果	9
第 5 章	まとめ	10
付録 A	計算プログラム	13

第1章 序論

世の中には、静電場の計算を経た後、設計すべき装置が数多く存在する。例えば、高電圧碍子やCRT等である。一般に高電圧機器は、その計算が必要となる場合が多い。静電場の計算は、偏微分方程式を解くことになるが、式が簡単なことから差分法が用いられることが多い。しかし、この方程式には、計算区分が四角形で境界での形状精度が悪い、境界条件の設定が複雑となる欠点がある。

そこで本研究では、計算区分が三角形で形状精度が良く、更に境界条件の設定が容易な有限要素法を用いることにした。有限要素法を用いた静電場と計算するプログラムを作成することが本研究のメインテーマである。本研究で用いた有限要素法は、広い範囲を一つの式で近似するより、計算する領域をたくさんの小部分に分け、各部分ごとの簡単な近似式をつないで全体を近似するという考え方である。

今回は軸対称構造の静電場を求めるものとして加速器に用いられる電子銃を取り上げた。ここで、各々の役割は、

- 碍子 ; 絶縁する。
- カソード ; 温度を上げることで電子を飛び出しやすくする。
- 集束電極 ; 角度によって電子ビームサイズを変える。

となっている。

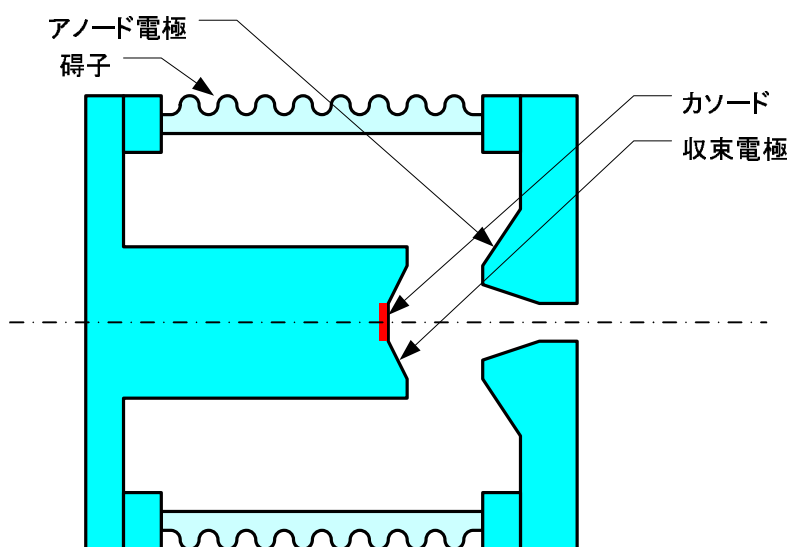


図 1.1: 電子銃

第2章 有限要素法による静電場解析の理論

2.1 マクスウェルの方程式

電磁現象を記述する微分方程式は [1]、マクスウェルの方程式と呼ばれ、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

と書かれる 4 組の連立の偏微分方程式である。ここで、

記号	物理量	単位	スカラー/ベクトル
D	電束密度	[C/m ²]	ベクトル
B	磁束密度	[T] あるいは [Wb/m ²]	ベクトル
H	磁場 (の強さ)	[A/m]	ベクトル
E	電場 (の強さ)	[V/m]	ベクトル
ρ	電荷密度	[C/m ³]	スカラー
j	電流密度	[A/m ²]	ベクトル

である。これより静電場が満たす方程式を示す。これはマクスウェルの方程式の時間の項をゼロとした式になる。それは、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.6)$$

と書き表せる。ただし、物質中では

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.7)$$

の関係がある。ここで、 ε は誘電率である。これは、異方性の物質では 2 階のテンソルとなる。しかし、ほとんど実用に使われている物質は、等方的である。そこで、ここでは等方的な物質のみを考えることにする。すると、それはスカラー量として取り扱うことができ、計算が簡単になる。静電場の問題は、全て電束密度と電場の関係式 (2.7) を用い、連立偏微分方程式 (2.5) と (2.6) を解くことになる。単純な境界条件の場合には解析解が得られるが、一般的には解析解を求めることは不可能である。

通常、静電場の問題では電場 E を直接計算するより、ポテンシャルを求め、それから電場を計算する方が簡単である。何故なら電場はベクトルで未知数が 3 個あるが、ポテンシャルはスカラー

なので未知数が1個で済むためである。このポテンシャル ϕ は、正確にはスカラーポテンシャル
と言

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (2.8)$$

と定義される。こうすることにより、静電場のマクスウェルの方程式 (2.6) が自動的に満足される¹。

これで、静電場のマクスウェルの方程式のひとつが満足したので、残りを満足させるためのス
カラーポテンシャルの条件を探せばよいことになる。残りの式 (2.5) と式 (2.7)、そしてスカラー
ポテンシャルの定義から、

$$\begin{aligned} \rho &= \nabla \cdot \mathbf{D} \\ &= \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} \\ &= -\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) \end{aligned} \quad (2.9)$$

が直ちに分かる。これが静電場を計算するときのスカラーポテンシャルが満たすべき偏微分方程
式である。右辺と左辺を入れ替えると、

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = -\rho \quad (2.10)$$

となる。

次節で静電場の汎関数を示す前に、もう少し一般的なこと考えると、誘電率が一定となること
が多い。その場合、誘電率は積分の外に出すことができ、

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.11)$$

となる。これは、ポアソン (Poisson) 方程式と呼ばれる。また、計算する領域内に電荷が無い問
題も多くあり、

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.12)$$

となる。これは、ラプラス (Laplace) 方程式と呼ばれる。

実際の静電場の問題では、マクスウェルの方程式から直接導かれる式 (2.5) や (2.6) の代わりに、
適当な境界条件を課して、式 (2.10) や (2.11)、(2.12) を計算する。これらの式のうち、条件に適
合した最も簡単式を選択する。次節では式 (2.10) の汎関数を示す。

2.2 汎関数

静電場の汎関数は

$$F[\phi] = \int \left[\frac{\epsilon}{2} (\nabla \phi)^2 - \rho \phi \right] dV \quad (2.13)$$

¹回転の勾配はゼロである。全ての勾配はうずなしである

となっている。この式の第一変分 δF を計算し、それがゼロになる条件を考えることにする。第一変分は、 ϕ を $\delta\phi$ 変化させたときの微小変化量で

$$\begin{aligned}
\delta F &= F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] \\
&= \int \left[\frac{\varepsilon}{2} \{ \nabla(\phi + \delta\phi) \} \cdot \{ \nabla(\phi + \delta\phi) \} - \rho \cdot (\phi + \delta\phi) \right] dV \\
&\quad - \int \left[\frac{\varepsilon}{2} (\nabla\phi)^2 - \rho\phi \right] dV \\
&= \int \left[\frac{\varepsilon}{2} \{ (\nabla\phi)^2 + 2(\nabla\phi) \cdot (\nabla\delta\phi) + (\nabla\delta\phi)^2 \} - \rho\phi - \rho\delta\phi \right] dV \\
&\quad - \int \left[\frac{\varepsilon}{2} (\nabla\phi)^2 - \rho\phi \right] dV \\
&\quad \text{2次の微少量を無視すると} \\
&= \int [\varepsilon(\nabla\phi) \cdot (\nabla\delta\phi) - \rho\delta\phi] dV \\
&\quad \text{ベクトル恒等式 } \nabla \cdot (\mathbf{V}f) = \mathbf{V} \cdot \nabla f + f\nabla \cdot \mathbf{V} \text{ を上手につかう} \\
&\quad \mathbf{V} = \varepsilon(\nabla\phi), \quad f = \delta\phi \text{ とする。} \\
&= \int [\nabla \cdot \{ \varepsilon(\nabla\phi)\delta\phi \} + \delta\phi \nabla \cdot \{ \varepsilon(\nabla\phi) \} - \rho\delta\phi] dV \\
&\quad \text{この式の第1項に発散定理を使い、式を整理すると} \\
&= \int \varepsilon(\nabla\phi)\delta\phi \cdot \mathbf{n}dS + \int [\nabla \cdot (\varepsilon\nabla\phi) - \rho] \delta\phi dV \tag{2.14}
\end{aligned}$$

となる。

任意の $\delta\phi$ に対して、この第一変分 δF がゼロになる条件を考える。そのためには、式 (2.14) の右辺の第1項と第2項の被積分関数がともにゼロになる必要がある。まず、第1項であるが、それは

$$(\nabla\phi) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{2.15}$$

$$\delta\phi = 0 \tag{2.16}$$

のいずれかである。最初の条件はノイマン条件で、何も境界条件を指定しなければ、電場と境界は平行になると言うことである。2番目のものは、境界でのスカラーポテンシャルを指定するディレクレ条件である。即ち、第一変分の右辺第1項は境界条件を表すのである。

次に、第2項であるが、これは計算している領域で

$$\nabla \cdot (\varepsilon\nabla\phi) - \rho = 0 \tag{2.17}$$

となる必要がある。これは、スカラーポテンシャルを用いた静電場のマクスウェルの方程式そのもので、式 (2.10) と等しい。

以上のことから、静電場を計算するためには、式 (2.13) の第一変分をゼロにすればよいことが分かる。静電場のマクスウェルの方程式は、式 (2.13) の第1変分をゼロにするのと等しいのである。

2.3 離散化

軸対称問題は、円柱座標系を使うのがセオリーである。この場合、解析する機器の形状は完全軸対称で、電荷分布も同じである。スカラーポテンシャルはスカラー量なので、ベクトルポテン

シャルのように煩わしいことはなにもない。有限要素法で計算するときには、ただ汎関数の値を求めれば良いのである。

静電場の汎関数は式 (2.13) で示したとおりである。この式にはスカラーポテンシャルの勾配の演算が含まれる。円柱座標系の勾配は、

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z} \quad (2.18)$$

である。軸対称構造の静電場には、 E_θ がゼロである。従って、スカラーポテンシャルの勾配の $\hat{\theta}$ 成分はゼロになる。そのため、スカラーポテンシャルは

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z} \quad (2.19)$$

となる。

この回転の結果を汎関数の式 (2.13) に適用すると、

$$F[\phi] = \int \left[\frac{\varepsilon}{2} \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^2 \right\} - \rho\phi \right] 2\pi r dr dz \quad (2.20)$$

となる。

特に静電場の場合は、ラプラス方程式を計算することが多く、その場合は、式 (2.20) を $\rho = 0$ とすればよい。すると、その式は静電場のエネルギーを表す式になる。その第一変分がゼロということは、安定状態はエネルギーが停留値になることで、一般には最低エネルギーになる。エネルギーがもっとも小さいときが安定である。

式 (2.20) をラプラス方程式で計算すると [2]、

$$F[\phi] = \frac{\varepsilon}{2} \int \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^2 \right\} 2\pi r dr dz \quad (2.21)$$

となる。この式の第一変分をゼロとすればよいので、

$$\frac{\partial F[\phi]}{\partial\phi} = 0 \quad (2.22)$$

となる ϕ を求める。

これを一つの三角形 (i, j, k) で考えると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F[\phi_{ijk}]}{\partial \phi_i} &= \pi \varepsilon \frac{\partial}{\partial \phi_i} \int \left\{ \left(\frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial r} \right)^2 \right\} r dr dz \\
&= 2\pi \varepsilon \int \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \cdot \frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \phi_i} \cdot \frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial r} \right) r dr dz \\
&= 2\pi \varepsilon \int \left\{ \frac{r_k - r_j}{\Delta_{ijk}} \left(\frac{r_k - r_j}{\Delta_{ijk}} \phi_i + \frac{r_i - r_k}{\Delta_{ijk}} \phi_j + \frac{r_j - r_i}{\Delta_{ijk}} \phi_k \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{z_j - z_k}{\Delta_{ijk}} \left(\frac{z_j - z_k}{\Delta_{ijk}} \phi_i + \frac{z_k - z_i}{\Delta_{ijk}} \phi_j + \frac{z_i - z_j}{\Delta_{ijk}} \phi_k \right) \right\} r dr dz \\
&= \frac{2\pi \varepsilon}{(\Delta_{ijk})^2} \int [(r_k - r_j) \{ (r_k - r_j) \phi_i + (r_i - r_k) \phi_j + (r_j - r_i) \phi_k \} \\
&\quad + (z_j - z_k) \{ (z_j - z_k) \phi_i + (z_k - z_i) \phi_j + (z_i - z_j) \phi_k \}] r dr dz \\
&= \frac{2\pi \varepsilon}{(\Delta_{ijk})^2} \left\{ (r_k - r_j)^2 \cdot \phi_i + (r_k - r_j) (r_i - r_k) \phi_j + (r_k - r_j) (r_j - r_i) \phi_k \right. \\
&\quad \left. + (z_j - z_k)^2 \cdot \phi_i + (z_j - z_k) (z_k - z_i) \phi_j + (z_j - z_k) (z_i - z_j) \phi_k \right\} \\
&\quad \times \int r dr dz \tag{2.23}
\end{aligned}$$

となる。ここで式 (2.23) の $\int r dr dz$ は、

$$\int r dr dz = \frac{\Delta_{ijk}}{2} \cdot \frac{r_i + r_j + r_k}{3} \tag{2.24}$$

と近似できる。従って、式 (2.23) は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F[\phi_{ijk}]}{\partial \phi_i} &= \frac{\pi \varepsilon}{\Delta_{ijk}} \cdot \frac{r_i + r_j + r_k}{3} [\{ (r_k - r_j)^2 + (z_j - z_k)^2 \} \phi_i \\
&\quad + \{ (r_k - r_j) (r_i - r_k) + (z_j - z_k) (z_k - z_i) \} \phi_j \\
&\quad + \{ (r_k - r_j) (r_j - r_i) + (z_j - z_k) (z_i - z_j) \} \phi_k] \tag{2.25}
\end{aligned}$$

となる。以上より、これを各々の三角形の頂点ごとに繰り返して行うことによりスカラーポテンシャルの値が求められる。

2.4 ポテンシャルから電場の計算

勾配から電磁場を求めるのは、静電場の問題に現れる。即ち、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \tag{2.26}$$

である。ここではこの勾配の計算方法について述べる。

静電場の問題はスカラーポテンシャルを計算するのが一般的である。それがもっとも計算が簡単であるからである。我々は、軸対称構造の静電場の問題を計算している。軸対称なので、ポテンシャル ϕ は (r, z) の関数で、 θ 方向には依存しない。従って、このポテンシャルの勾配から求め

られる電場は、

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (2.27)$$

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.28)$$

となる。

有限要素法では三角形要素の頂点でスカラーポテンシャル ϕ の値を計算する。これら 3 つのスカラーポテンシャルから、要素内の電場 E_r と E_z を求めなくてはならない。要素内の任意の位置でのスカラーポテンシャルを計算する式を導く。ここでの我々の計算は 1 次近似なので、要素内のスカラーポテンシャルは

$$\phi(z, r) = \alpha + \beta z + \gamma r \quad (2.29)$$

となる。

ポテンシャルの値が分かれば、電場は計算できる。式 (2.29) を式 (2.27) や (2.28) に代入すると、

$$E_r = -\gamma \quad (2.30)$$

$$E_z = -\beta \quad (2.31)$$

となる。スカラーポテンシャルの値を示す 1 次近似の係数 γ や β を計算すれば、電場が分かるのである。非常に単純な式である。

電場を計算するための係数 α や γ 、 β の計算は、

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

となる。もちろん、 (x_i, y_i) と (x_j, y_j) 、 (x_k, y_k) は頂点の座標、 ϕ_i と ϕ_j 、 ϕ_k はその位置のスカラーポテンシャルである。これで、要素内の電場の値は計算できる。

第3章 数値計算

3.1 プログラムの概要

先の汎関数を離散化した式を用いて、プログラムの作成を行う。主な概要は以下のとおりである。

1. 係数行列の作成
2. 反復法よりスカラーポテンシャルを求める
3. 求められたスカラーポテンシャルより電場を求める

3.2 連立方程式の計算方法

反復法の一つのガウス・ザイデル法をも用いた。連立方程式

$$Ax = b \quad (3.1)$$

を満たす x を数値計算より求める。ここで A は係数行列、 x は真の解とする。ここで、ある計算より n 回目で求められたものを x_n とする。そして、計算回数を増やして、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (3.2)$$

になったとする。この様に計算回数を増やし、真の解に近づける方法を反復法という。

ガウス・ザイデル方はヤコビ法を改良したのものであり、 $x^{(k+1)}$ の各成分の計算が終わると、それを直ちに使うことを考えている。即ち、 $x_i^{(k+1)}$ を計算するときに、

$$x_i^{k+1} = a_{ii}^{-1} \left\{ b_i - \left(a_{i1}x_1^{(k+1)} + a_{i2}x_2^{(k+1)} + a_{i3}x_3^{(k+1)} + \cdots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} \right. \right. \\ \left. \left. + a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} + a_{ii+2}x_{i+2}^{(k)} + a_{ii+3}x_{i+3}^{(k)} + \cdots + a_{in}x_n^{(k)} \right) \right\} \quad (3.3)$$

となるものである。

第4章 計算結果

この図はポテンシャルの様子、つまり電圧の様子を示している。左側の黒い部分から右側の白い部分にいくにしたがって電圧が高くなっている。図に現れている黒い線は等電位線を示す。なお、この線が密な部分ほど電場が高くなっている。

また、この図の詳細としては、

- ノード数 : 1136
- メッシュ数 : 2724
- 計算時間 : 50s

となっている。

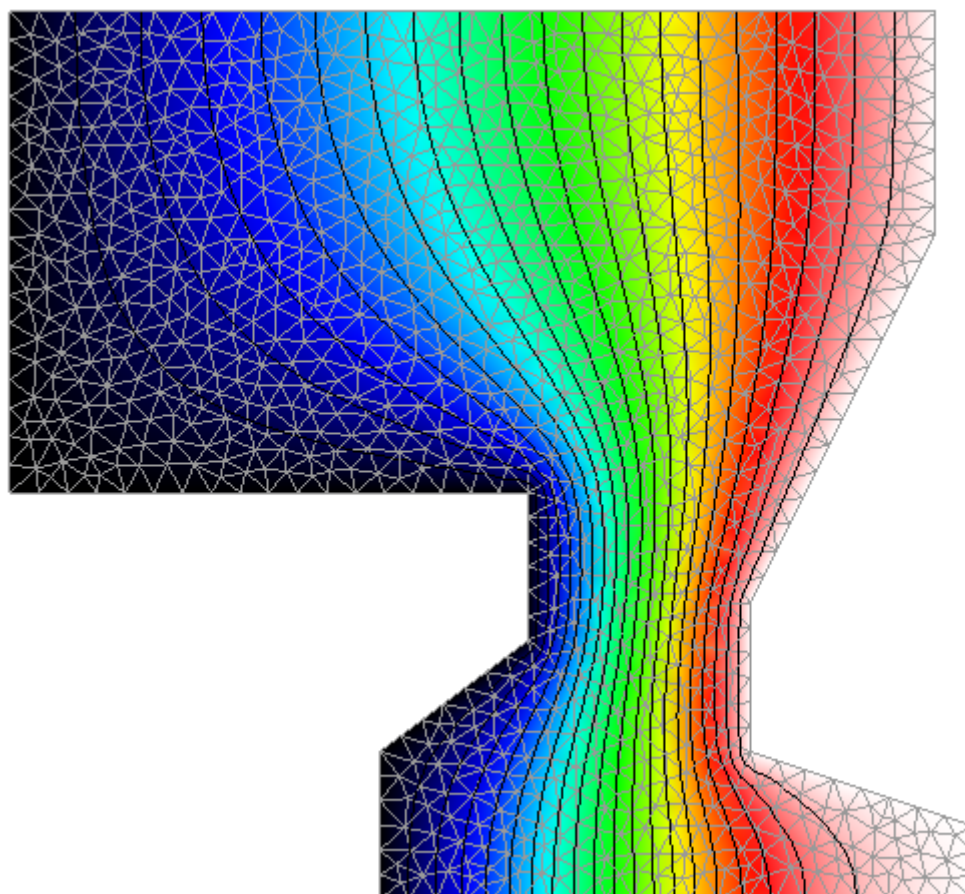


図 4.1: ポテンシャルの様子 (左側 ; -100kV、右側 ; 0V)

第5章 まとめ

本研究では、軸対称構造の静電場を解析する有限要素法のプログラムを作成した。その中で、離散化とそれから導かれる連立方程式を解くプログラムの作成が私の課題であり、それを完成させた。なお、プログラムの作成にはC++をもちいた。これにより計算結果に示してあるとおりの結果が得られ、静電場を求めることができた。

しかし、プログラムの解析精度の検証ができておらず今後の課題として残る。静電場の解析結果のわかっている簡単な形状(例えば、同軸の形状もの)と比較することにより、それは可能であろう。解析精度が不十分な場合は、次のような方法でさらに精度を向上させる必要がある。

- メッシュ(三角形)の数の増加
- アダプティブメッシュの使用
- 高次要素の使用

ここで、アダプティブメッシュとは場所によりメッシュの区切り方を変えるものである。今回のメッシュの区切り方はほぼ均一の大きさであったが、それは領域内の場所の変化に応じて変化の激しい所では細かく区切り、なだらかな所では通常の大きさで区切るという方法である。高次要素とは、今回のように要素内を平面(1次式)で行うのではなく、2次式、3次式などの高次式を使用するものである。当然、精度は良くなるが計算は複雑になる。

これらより精度が向上し、正しい値までに達したならば、次に電子ビームの軌道計算を求める必要がある。静電場を解析することにより電流量、電子ビームサイズが決まってはくるが、それから電子ビームの軌道が厳密にわかることはない。そのために求められた解をもとに電子ビーム軌道を計算するプログラムを新たに作成することが次の課題となってくる。

関連図書

- [1] 飯田修一. 第2版電磁気(上). バークレー物理学コース2. 丸善株式会社, 2002.
- [2] 戸川隼人. 変分方と有限要素法. 日本評論者, 1994.

謝辞

ご指導してくださった担当教員の山本先生、さまざまな面でご協力していただいた専攻科の夏井拓也さん、宮田翔吾さんに感謝の意を表します。

付録A 計算プログラム

```
/*=====
/*=====
/* function read_data */
/* */
/* Purpose : reading input datas */
/* */
/*=====
/*=====
```

10

```
/* ----- header files -----*/
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "laplace.h"
#include <time.h>

/*=====
/* function read_data */
/*=====
```

```
#include <vector>
using namespace std;

void gauss(int nodes,vector < vector < double > > c,double area[],double phi[]);

int calculate_laplace_eq(int elements, int nodes,
                        int mtj[][4], int jac[][4], int idm[],
                        double px[], double py[],
                        int pt_bc_k[], double pt_bc_v[],
                        double area[], double phi[])
{
    vector < vector < double > > c;

    int i,j,l,n;
    int k=0,a=0,b=0;
    double delta,d,d1,d2,d3,ds;
    double px_x[4],py_y[4];
    double alfa[5000],beta[5000],gamma[5000];
    double er[5000],ez[5000];

    /* 初期設定 */
    c.resize (nodes+1);
    for(i=1; i<=nodes; i++){
        c[i].resize(nodes+1);
        phi[i]=0.0;
        area[i]=0.0;
```

30

40

50


```

    alfa[i]=0.0;
    beta[i]=0.0;
    ganma[i]=0.0;
    er[i]=0.0;
    ez[i]=0.0;
}

/*calculate delta*/
for(i=1; i<=elements; i++){
    d1= px[mtj[i][1]]*(py[mtj[i][2]]-py[mtj[i][3]]);
    d2= px[mtj[i][2]]*(py[mtj[i][3]]-py[mtj[i][1]]);
    d3= px[mtj[i][3]]*(py[mtj[i][1]]-py[mtj[i][2]]);
    ds=(py[mtj[i][1]]+py[mtj[i][2]]+py[mtj[i][3]])/3.0;

    delta=1.0/(2.0*(d1+d2+d3));
    d=ds*4.0*atan(1.0)*delta;

    /* 係数行列の作成 */
    px_x[1]=(px[mtj[i][3]]-px[mtj[i][2]]);
    py_y[1]=(py[mtj[i][2]]-py[mtj[i][3]]);

    px_x[2]=(px[mtj[i][1]]-px[mtj[i][3]]);
    py_y[2]=(py[mtj[i][3]]-py[mtj[i][1]]);

    px_x[3]=(px[mtj[i][2]]-px[mtj[i][1]]);
    py_y[3]=(py[mtj[i][1]]-py[mtj[i][2]]);

    for(j=1; j<=3; j++){
        c[mtj[i][j]][mtj[i][1]]+=delta*(px_x[1]*px_x[j]+py_y[1]*py_y[j]);
        c[mtj[i][j]][mtj[i][2]]+=delta*(px_x[2]*px_x[j]+py_y[2]*py_y[j]);
        c[mtj[i][j]][mtj[i][3]]+=delta*(px_x[3]*px_x[j]+py_y[3]*py_y[j]);
    }
}

/*the right side of an equation & dirichlet condition*/
for(l=1; l<=nodes; l++){
    if(pt_bc_k[l] == 1){
        for(n=1; n<=nodes; n++){
            c[l][n]=0.0;
        }
        c[l][l]=1.0;
        area[l]=pt_bc_v[l];
    }
}

clock_t t_start=clock();

gauss(nodes,c,area,phi);

/*calculate Static Electric Field */
for(i=1; i<=elements; i++){
    d1= px[mtj[i][1]]*(py[mtj[i][2]]-py[mtj[i][3]]);
    d2= px[mtj[i][2]]*(py[mtj[i][3]]-py[mtj[i][1]]);
    d3= px[mtj[i][3]]*(py[mtj[i][1]]-py[mtj[i][2]]);

```

```

delta=1.0/(2.0*(d1+d2+d3));

alfa[mtj[i][1]] =delta*phi[mtj[i][1]];
beta[mtj[i][2]] =delta*phi[mtj[i][2]];
ganma[mtj[i][3]]=delta*phi[mtj[i][3]];
}

/* a boundary condition*/
for(n=1; n<=nodes; n++){
k=0;
for(i=1; i<=elements; i++){
for(j=1; j<=3; j++){

if(n == mtj[i][j]){

if( py[mtj[i][1]]==0.0){
a++;
}else if(py[mtj[i][2]]==0.0){
a++;
}else if(py[mtj[i][3]]==0.0){
a++;
}

if(pt_bc_k[mtj[i][1]]==1){
b++;
}else if(pt_bc_k[mtj[i][2]]==1){
b++;
}else if(pt_bc_k[mtj[i][3]]==1){
b++;
}

if(a>=2 && b>=2 || a!=1 && b!=1){
k++;
er[n]-=ganma[mtj[i][j]];
ez[n] -=beta[mtj[i][j]];
}

}

}

er[n]/=k;
ez[n]/=k;
}

/*output file*/
FILE *sol=fopen("test.field","w");
fprintf(sol,"$field\n");
for(i=1; i<=nodes; i++){
fprintf(sol,"%d\t %1f\t %1f\t %1f\n",i,phi[i],er[i],ez[i]);
}

fprintf(sol,"$end\n");
fclose(sol);

printf("\n%ld\n",(clock()-t_start)/1000000);

```

```

    return (0);
}

/* ガウス・ジョルダン */
void gauss(int nodes, vector < vector < double > > c, double area[], double phi[]) {
    int i, j, k;
    double s;

    for(k=1; k<=500; k++){
        for(i=1; i<=nodes; i++){
            s=0.0;

            for(j=1; j<=nodes; j++){
                if(i!=j){
                    s+=c[i][j]*phi[j];
                }
            }

            phi[i]=(1.0/c[i][i])*(area[i]-s);
        }
    }
}

```

180

190
