有限要素法によるヘルムホルツ方程式の解法

生産システム工学専攻

16-5　夏井拓也

1　ヘルムホルツ方程式について

ヘルムホルツ方程式は，振動を表す方程式である．この方程式から得られた固有値問題を解くことで，固有振動数が得られる．

軸対称３次元のヘルムホルツ方程式の変分形を以下に示す．

$$J = \pi \iint_D r \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \lambda u^2 \right\} drdz \tag{1}$$

2　固有値問題の行列

ヘルムホルツ方程式を有限要素法によって固有値問題にすると，

$$\mathbf{Ku} = \lambda \mathbf{Mu} \tag{2}$$

という形の一般化固有値問題になる．ここで，ディレクレ条件は斉次ディレクレ条件とし，節点の番号は，ディレクレ条件が最後になっているものとする．すなわち，全節点数が n でディレクレ条件以外の節点が１番から m 番まで，$m+1$ 番から n 番までは，斉次ディレクレ条件だとする．このような前提条件で行列をつくると，m 行 m 列の行列 $\mathbf{K}, \mathbf{M}$ が以下のようにつくられる．

まず，$\mathbf{K}$ を決定する．k_{ij} の要素 (I) の寄与による項は以下のようになる．

$$k_{ij}|_{(I)} = 2\pi \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r}\frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z}\frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \iint_{(I)} r\ drdz \tag{3}$$

これをさらに計算すると以下のようになる．

$$k_{ij}|_{(I)} = 2\pi \frac{1}{6\Delta} (r_i + r_j + r_k) \left[(z_j - z_k)(z_k - z_i) + (r_j - r_k)(r_k - r_i) \right] \tag{4}$$

同様に，$\mathbf{M}$ も求めていく．m_{ij} の要素 (I) の寄与による項は以下のようになる．

$$m_{ij}|_{(I)} = 2\pi \iint_{(I)} r \phi_i \phi_j drdz \tag{5}$$

これをさらに計算すると以下のようになる．

$$k_{ij}|_{(I)} = \begin{cases} (1/120)(2r_i + 2r_j + r_k)\Delta\ (i \neq j) \\ (1/60)(3r_i + r_j + r_k)\Delta\ (i = j) \end{cases} \tag{6}$$

ここで，Δ は三角形の面積の 2 倍で，

$$\Delta = r_i z_j + r_j z_k + r_k z_i - z_i r_j - z_j r_k - z_k r_i \tag{7}$$

となる．

この一般化固有方程式を解けば固有振動数が求められる．