試験問題 (生産システム工学専攻 電気磁気学特論)

生産システム工学専攻　　学籍番号　　　　氏名

[問 1] 静電場に関する設問

(1) $\boxed{\textit{10 点}}$

$$
\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right) &= \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{r^2}\right)\nabla(r) \\
&= -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+z^2},\right. \\
&\qquad\qquad \left.\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\
&= -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\right. \\
&\qquad\qquad \left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}
\end{aligned}
$$

(2) $\boxed{\textit{10 点}}$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right) &= \nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right) \\
&\qquad \text{前問の結果を利用すると} \\
&= -\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\
&= -\left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\cdot\boldsymbol{r} - \frac{1}{r^3}\nabla\cdot\boldsymbol{r} \\
&= \left(\frac{3}{r^4}\right)\nabla r\cdot\boldsymbol{r} - \frac{3}{r^3} \\
&= \left(\frac{3}{r^4}\right)\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)\cdot(x,y,z) - \frac{3}{r^3} \\
&= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \\
&= 0 \qquad \text{ただし，} r \neq 0 \text{ のとき}
\end{aligned}
$$

(3) $\boxed{\textit{10 点}}$

原点 ($\boldsymbol{r}=0$) を含まない場合,

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right) = 0 \tag{1}$$

となる．前問の結果より，原点を除いて被積分関数はゼロであるからである．

図 1 のよう原点を含まない領域で積分をする．そして，連結部を非常に小さくとり，体積分を面積分に直すガウスの定理を使と以下を得ることができる．

$$
\begin{aligned}
\int_{V'}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V &= \int_S \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= \int_{S1}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \int_{S2}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= \int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V - \int_{S2}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S
\end{aligned} \tag{2}
$$

となる．ここで，V' は原点を含まない領域に対して，V は原点を含む．V' には原点が含まれないので，積分の値はゼロとなる．従って，

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = \int_{S2}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{3}$$

となる．この右辺の領域を球形にする．すると図から明らかに，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$ は $-r$ となる．右辺は，表面積を乗じるだけで

$$
\begin{aligned}
\int_{S2}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S &= -\int_{S2}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}S \\
&= -\frac{4\pi r^2}{r^2} \\
&= -4\pi
\end{aligned} \tag{4}
$$

となる．従って,

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = -4\pi \tag{5}$$

となる．これと，式 (1) とデルタ関数の定義から,

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{6}$$

となる．

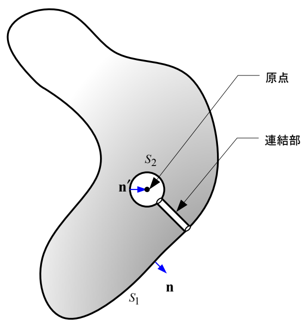

図 1: 積分領域に原点が含まれる場合

(4) $\boxed{\textit{5 点}}$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{7}$$

[**問 2**]　クーロンの法則に関する問い．

(1) $\boxed{5\text{点}}$

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

(2) $\boxed{5\text{点}}$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

(3) $\boxed{5\text{点}}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V'$$

(4) $\boxed{10\text{点}}$

前問の結果から，電場は分かっている．ベクトル解析の知識を使って，それを書き換えると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V' \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \qquad (1)\end{aligned}$$

が得られる．この式の両辺の発散を計算する．

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\nabla\cdot\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \\ &\qquad \nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ \text{より} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\times\{-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\}\,\mathrm{d}V' \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \\ &= \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \qquad (2)\end{aligned}$$

これで，電場の発散が計算できた．当然，この式の座標変数は $\boldsymbol{r}$ のみなので，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

と書け，設問の証明ができた．

(5) $\boxed{10\text{点}}$

電場の回転を計算するために，式 (1) の両辺の回転を計算する．

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\nabla\times\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \\ &\qquad \text{ベクトル恒等式}\ \nabla\times\nabla\phi = 0\ \text{より} \\ &= 0 \qquad (4)\end{aligned}$$

電場の回転はゼロである．設問の証明終わり．

[**問 3**] マクスウェルの方程式に関する設問

(1) $\boxed{\textit{10 点}}$ 微分形のマクスウェルの方程式は，以下の通りである．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

(2) $\boxed{\textit{10 点}}$

これらの式を

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \qquad \text{ガウスの定理}$$
$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \mathrm{d}S = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\ell \qquad \text{ストークスの定理}$$

を使って，積分形に書き直す．

マクスウェルの方程式の 1 番目の式の両辺を体積積分を行い，ガウスの定理を使うと

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}V = \int_V \rho \mathrm{d}V \quad \text{ガウスの定理} \Rightarrow \quad \int_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

となり，積分形のガウスの法則が得られる．

同じことをマクスウェルの方程式の 2 番目の式に施すと

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}V = 0 \quad \text{ガウスの定理} \Rightarrow \quad \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0$$

が得られる．これが磁場に関する積分形のガウスの法則である．

次に，マクスウェルの方程式の番目の式に面積積分を行い，ストークスの定理を使うと

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{E} \mathrm{d}S = \int_S \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) \mathrm{d}S$$
$$\text{ストークスの定理} \Rightarrow$$
$$\int_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

が得られる．これは，積分形で表したファラデーの電磁誘導の法則である．

最後は，マクスウェルの方程式の 4 番目の式に同じようにストークスの定理を応用すると

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{H} \mathrm{d}S = \int_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}S$$
$$\text{ストークスの定理} \Rightarrow$$
$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

が得られる．これは，積分形のアンペール-マクスウェルの法則である．

[**問 4**] 静磁場に関する設問

(1) $\boxed{\textit{10 点}}$

点 O から直線電流に沿った座標を x とする．A の方向が負で B の方向が正とする．このときの微小磁場は，ビオ・サバールの法則より

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}x \times \boldsymbol{r}}{r}$$

となる．ここで，P 点での磁場は紙面と垂直方向であり，$|\mathrm{d}x \times \boldsymbol{r}/r| = \sin\theta \mathrm{d}x$ となる．x の位置によらず磁場の方向は同じなので，$\mathrm{d}B$ とスカラーで書いても良いだろう．微小磁場は，

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I \sin\theta \mathrm{d}x}{4\pi r^2}$$

となる．これを積分すればよいのだが，そのために，

$$\tan\theta = -\frac{R}{x} \qquad\qquad r\sin\theta = R$$

をつかう．これらから，

$$\mathrm{d}x = \frac{R}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \qquad\qquad r = \frac{R}{\sin\theta}$$

これらを使うと，

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

となり，A から B まで積分を行うと，

$$\begin{aligned} B &= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right] \end{aligned}$$

となる．