静電場(その1)

山本昌志*

2007年5月29日

概 要

クーロンの法則からスカラーポテンシャルまで，説明する．まずは，近接作用の概念を用いて，電場を導入する．そして，電場で書かれた一般化されたクーロンの法則を導く．これを使って，静電場の満たす微分方程式を示す．さらに，ガウスの定理やストークスの定理を用いて，積分形の式を導く．最後にスカラーポテンシャルを導入して，その性質を示す．

1　本日の授業内容

教科書の2章が，本日の講義内容である．同じ結論ではあるが，かなり教科書とは異なる説明を行っている．講義と教科書の両方を理解するのがよいだろう．

ここでは，電荷が固定されており，時間的に変化しない静電場について説明する．原理的に，静電場の問題は，

- クーロンの法則
- 重ね合わせの原理

で全て解ける．しかし，現実にはこれだけを用いて計算するのは大変である．そこで，いろいろな計算方法が考え出されたわけである．ここでは，それを学習する．これは，数学的に計算テクニックを展開しただけではなく，静電場をいろいろな側面から見ることになり，新たな概念が広がることになる．数学を使うが数学を学ぶのではないことを理解して欲しい．新たな概念のイメージを大事にすることが重要である．

数学は公理があり，それに従い粛々と論理を展開し，体系を作る．一方自然科学，特には公理はなく，自然そのものが基本法則になる．数学の公理に当たる物理学の基本法則はまだ分かっていないので，自然科学を学ぶ場合，いろいろな側面から考えなくてはならない．諸君は，いろいろな側面から考える訓練を受けなくてはならない．

クーロンの法則と重ね合わせの原理を基本法則として，静電場の理論はできる．しかし，これから導かれる法則も基本原理となりうる．いろいろな法則がでてくるが，どれも正しく，優劣が無い．優劣があるとすれば，発見された順序あるいは式の単純さくらいである．静電場の場合，クーロンの法則と重ね合わせの原理から入るのは，直感的なイメージがつきやすいからである．それと，最初に発見されたからである．ここでも，クーロンの法則から出発するが，それから導かれるどの法則にも優劣が無いことを理解しなくてはならない．実際に問題を解くときには，計算が簡単な法則を使えば良いのである．

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

2　静電力と静電場

2.1　静電力の式の分割

先週，クーロンの法則 (Coulomb law) について，話した．もう一度，電場を導入するために，この法則について述べる．真空中に置かれた 2 つの電荷の間に働く力は，

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1}$$

と書くことができる．この式のそれぞれ記号とその単位については，表 1 に示している．qQ が負であれば，2 つの電荷に働く力は引力となり，正であれば斥力となる．当面，$1/4\pi\varepsilon_0$ は比例定数と考えて欲しい．

表 1: クーロンの法則の単位．ただし，SI 単位系である．

記号	物理量	単位	mksA での表現
F	力	N	m kg s^{-2}
Q または q	電荷量	C	s A
ε_0	真空中の誘電率	F/m	m^{-3} k^{-1} s^4 A^2

この力は，2 通りの見方ができる．遠隔作用 (action at distance) と近接作用 (action through medium) である．二つの電荷，q と Q のみが存在する場合の一方の電荷 q に働く力を考える．まずは，遠隔作用であるが，その概念を図 1 に示す．電荷 Q が q を引っ張っているのである．それだけの話であるが，なにもない空間を通して力が作用しているのである．何もない空間を通して力が作用するということはなかなかイメージできない．このことについては文献 [1] [1]には次のように書かれている．

> ニュートンが，太陽-地球間，地球-月間に引力が働くと語ったとき，何もない真空の空間を隔てて力が，それも瞬間的に及ぼされる—**遠隔作用**—というそのニュートンの考え方に多くの人が難色を示し，ニュートン自身もこの点ではっきりとした見解を出せないでいた．特に，日常的に知られる力の大半が，直接的接触による圧力や衝撃，あるいはゴムのような弾性体を媒介として伝えられるものであるだけに，遠隔作用のイメージはえがきにくいものであった．

次に近接作用であるが，そのイメージは図 2 である．Q があることによる q が受ける力は先ほどの遠隔作用と同じである．しかし，力の伝わり方が異なる．近接作用の場合は 2 段階で，

- Q がその周りの空間をゆがめる (場を変化させる)．
- 場が変化した結果，その場から q は力を受ける．

と考える．

どちらが正しいかというと，クーロンの法則だけ考えると，どちらも正しいのである．ただし，より進んだ問題を考えると遠隔作用には多くの問題がある．まずは，力が瞬時に伝わると言うのは，実験の結果から明らかに間違いである．この問題を解決するような遠隔作用を考えることもできると思われるが，その他

[1]これは初心者には良い教科書である．

いろいろと困難が生じる．そのようなことから，遠隔作用の考えはきっぱり捨てて，近接作用を採用した方が困難が少なくて済む．ということで，これ以降，全面的に近接作用の考えで進めることにする．

クーロンの法則の式 (1) から，近接作用にするためには，

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2}$$

$$F = qE \tag{3}$$

とすればよい．最初は，電荷 Q により r の位置の電場 E が生じると言っている．次の式は，その電場の作用により電荷 q は F という力を受けると言っている．このように，場を介して作用を受けるのである．

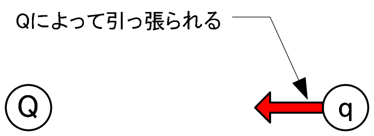

図 1: 電荷 q に及ぼされる遠隔作用

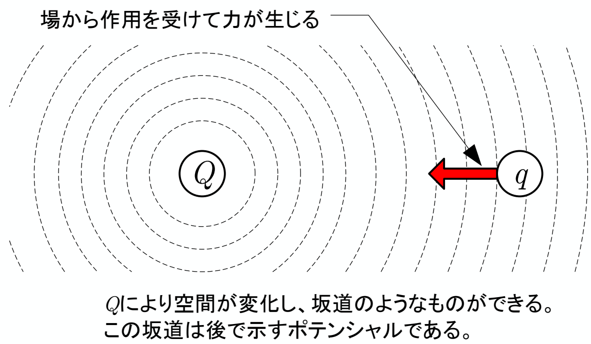

図 2: 電荷 q に及ぼされる近接作用

2.2 電場の概念

2.2.1 クーロンの法則と電場

先ほどの電場の導入には，わかり易くするためにベクトルを用いなかった．電場の概念が分かったので，ベクトルを使った正確な記述を行う．ベクトルを使ったクーロンの法則は，

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \tag{4}$$

となる．$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)/|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ は単位ベクトルなので，ちゃんと距離の 2 乗に反比例した力になっている．この式がクーロンの法則の全てを言っている．ベクトルは便利である．

力は求まった．q_2 が位置 $\boldsymbol{r}_1$ に作る電場は，

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \tag{5}$$

となる．q_2 が作る電場を図に示す．電場に沿った線が電気力線である．教科書にも書いてあるとおり，このような線は無いがいろいろと便利なので書かれる．「1[C] の電荷から，$4\pi\varepsilon$ 本の電気力線がでている」と

言う表現は全くのウソである．この辺も教科書の通り．ただ，積分もよく分からない者にガウスの法則を教えるために，こじつけの説明に使われている．

式 (5) を一般化して，$\boldsymbol{r}'$ の位置にある電荷 $q(\boldsymbol{r}')$ が，ある任意の位置 $\boldsymbol{r}$ につくる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{6}$$

となる．

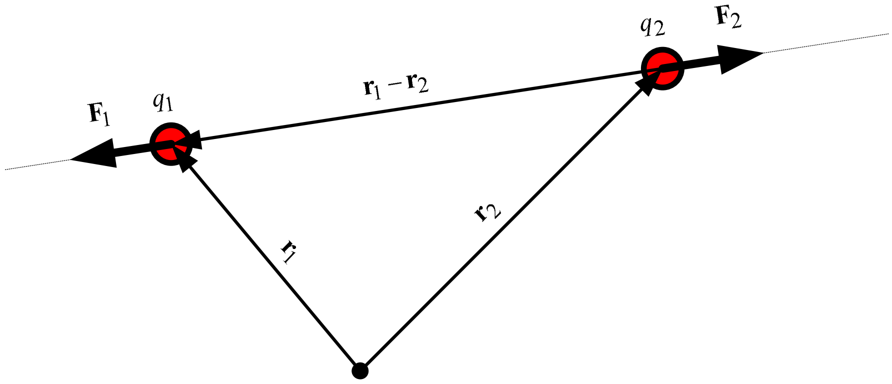

図 3: クーロン力

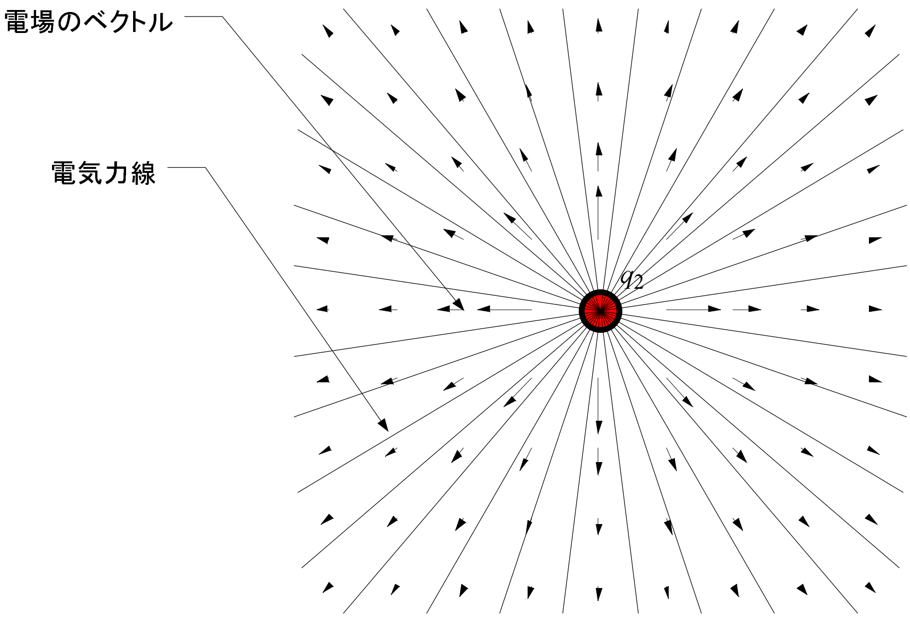

図 4: 電場と電気力線

2.2.2　重ね合わせの原理

いままでは，2 つの電荷の間に働く力を問題にしていた．3 つ以上の場合はどうなるだろうか？答えは，それぞれの電荷からによる力のベクトル和である．このことから，電場もベクトル和になると考えることができる．事実，全ての電荷が作る電場を足しあわせるとそこの電場が分かる．このように足しあわせることを重ね合わせの原理と言う．これから，ある任意の位置 $\boldsymbol{r}$ の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \tag{7}$$

となる．この様子を図 5 に示す．

次に，電荷が連続的に分布していると仮定しよう．位置 $\boldsymbol{r}$ での電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とすると，先ほどの和の部分は積分となり，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \tag{8}$$

と表せる．この様子を図 6 に示す．宇宙全体にわたってこの積分を行えば，静電場は分かる．しかし，実際の問題でこの積分を行うことはまず無い．単純な場合を除いて，この積分を実行することは大変である．そこで，もう少し簡単に計算する方法を考えることにする．

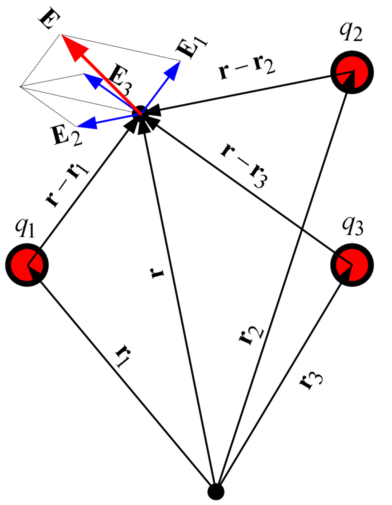

図 5: 点電荷がつくる電場の重ね合わせ

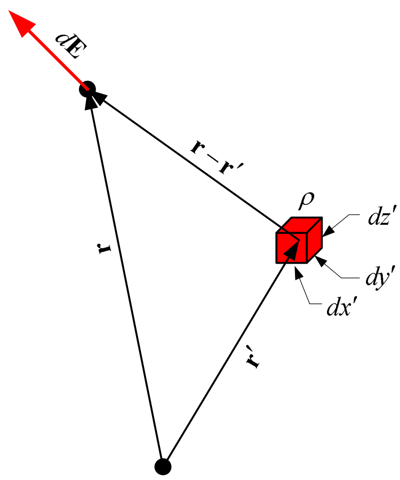

図 6: 連続分布した電荷が作る電場の重ね合わせ

3　静電場の微分方程式

電場を導入することにより近接作用の考えを導入したつもりでいた．しかし，式 (6) や (7)，(8) は，まだ満足できない．遠隔地にある電荷が電場を作っている式になっている．近接作用を考えると，その場所の電場はその周りからのみ作用を受けるべきである．そのためには，式を微分形に直すのが良いだろう．それぞれの式は正しいので，それを上手に使い微分形の式を導く．

3.1 静電場を表す微分方程式

クーロンの法則から，静電場 $\boldsymbol{E}$ が満たす微分方程式を探す．静電場の問題は，クーロンの法則である式 (5)，あるいはそれを一般化したクーロンの法則である式 (8) が全てを語っている．この一般化されたクーロンの法則から，静電場に関わる式の全てを導くことができる．そこで，これを使って，静電場を表す微分方程式を導く．式 (8) は長いので，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V' \tag{9}$$

と書き直す．体積分を行う領域 V' は考慮している空間，全てにわたっている．これを出発点としても良いが，もう少し変形しておく方が，後々，都合が良い．一般化された，ベクトル解析の知識を少し使うと，クーロンの法則は，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{10}$$

と書ける．この式を出発点としよう．ここで，積分は $\boldsymbol{r}'$ を変数とするが，勾配 ∇ は $\boldsymbol{r}$ を変数とする．この変数の違いに注意せよ．

静電場 $\boldsymbol{E}$ を表す微分方程式は，発散と回転により決めることができる．以前のベクトル解析で述べたように，任意のベクトル場は発散と回転から決めるとができる．一方，静電場は，式 (10) を用いて，過不足なく表すことができる．したがって，一般化されたクーロンの法則の式 (10) の発散と回転を計算すれば，静電場を表す微分方程式を求めることができる．

それでは，式 (10) の両辺の発散を計算する．

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\nabla\cdot\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \\
&\qquad \nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \text{ より } (\delta \text{ 関数のプリントを見よ}) \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\times\{-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\}\,\mathrm{d}V' \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \\
&= \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}
\end{aligned} \tag{11}$$

これで，電場の発散が計算できた．当然，この式の座標変数は $\boldsymbol{r}$ のみなので，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{12}$$

と書いてもよい．$\boldsymbol{r}'$ がないので，間違えることはない．この式を微分形のガウスの法則と言う．δ 関数を導入すると，こんなに簡単に美しくガウスの法則を導くことができる．δ 関数を使わないと，教科書に示しているように，いろいろな絵を用意しないと，この法則を示すことができない．δ 関数の威力が分かるだろう．δ 関数の説明では，同じ絵を用いているので，本質的には何も変わっていないことは，理解しておく必要がある．

ベクトル場の微分方程式の片割れが分かった．残りは，回転である．先ほど，同様に一般化されたクーロンの法則の式 (10) の両辺の回転を計算する．式 (10) の両辺の発散を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\nabla\times\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \\ &\text{ベクトル恒等式 } \nabla\times\nabla\phi = 0 \text{ より} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

これで，電場の回転が求まった．電場の回転はゼロである．

以上をまとめると，電場を表す微分方程式は，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \tag{14}$$

と書ける．

3.2 静電場を表す積分方程式

先に求めた回転と発散は，ガウスの定理とストークスの定理を用いて，容易に積分形に直すことができる．発散の式の両辺を体積分を行い，ガウスの定理を用いる．

$$\begin{aligned}\text{式 (14) の発散の左辺} &= \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \\ &= \int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{15}$$

となる．発散の右辺の方は取り立てて述べることはない．従って，発散の式を積分形に直すと

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\mathrm{d}V \tag{16}$$

となる．これが，積分形のガウスの法則である．この体積分を含む等式は，任意の領域で成り立つ．一般化されたクーロンの法則の式 (10) の場合，全ての領域 (全宇宙) にわたって積分を行う必要がある—のと大きく異なっている．

この積分形のガウスの法則が言っていることは，

- ある任意の閉じた空間の内部の電荷の総量を誘電率で割った値は，その空間の表面にわたっての電場の積分に等しい．

である．これは，便利な式で，実際の電場を計算する場合，使うことが多い．

次は，回転に関する積分形の式を求める．回転の式の両辺を面積積分を行い，ストークスの定理を用いる．

$$\begin{aligned}\text{式 (14) の回転の左辺} &= \int_S \nabla\times\boldsymbol{E}\mathrm{d}S \\ &= \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\ell \end{aligned} \tag{17}$$

回転をあらわす右辺はゼロなので，積分を行ってもゼロである．従って，積分形は

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\ell = 0 \tag{18}$$

となる．この式は，任意の閉じた領域で正電場を積分するとゼロになる—と言っている．もし，これが成立しないと，永久機関ができる．棒の片方の端に正の電荷，もう一方の端に発電機を接続する．これを静電場の中に入れる．もし，式 (18) がゼロでないとすると，この棒は永久に回転し続ける．エネルギー保存則に反する結果となり，常識的に考えておかしい．

4　静電ポテンシャル

実際に電場を計算するためのもう少し便利な式を導いておこう．静電場をあらわす一般化されたクーロンの法則の式 (10) は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \left\{ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \rho(\boldsymbol{r}') \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V' \right\} \tag{19}$$

と書いてもよい．体積分の積分変数は $\boldsymbol{r}'$ で，勾配 ∇ の微分の変数は $\boldsymbol{r}$ と異なるから，微分と積分を入れ替えることができる．ここで，右辺にある体積積分を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V' \tag{20}$$

とする．これは，全ての空間—宇宙全体—にわたっての積分である．この積分の値 ϕ をスカラーポテンシャルと言う．このスカラーポテンシャルを導入することにより，電場は，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{21}$$

と簡単に計算できる．以前，任意のベクトル場は管状と渦無しの場に分解できると述べた．この式から，静電場は渦無しのベクトル場で，管状の部分が無いことが分かる．

次にスカラーポテンシャルの性質を調べる．電荷 q を静電場の中に置くと，$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ という力を受ける．その力に抗して，その電荷を A 点から B 点まで，移動させるのに必要な仕事 W は

$$\begin{aligned} W &= -\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\ell \\ &= -q\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\ell \\ &= q\int_A^B \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\ell \\ &= q\left[\phi(B) - \phi(A)\right] \end{aligned} \tag{22}$$

となる．以前，勾配 ∇ の積分のところで説明したように，この積分は経路に依存しない．積分の両端の場所のみによって，この仕事量 W は決まるのである．仕事量 W は，A 点に比べたときの B 点での電荷 q が持つエネルギーの増加をあらわしている．$q\phi$ を位置によるエネルギー，すなわちポテンシャルエネルギー

と解釈することができる．よく考えると，この ϕ は電圧の定義とも等しい．ポテンシャル ϕ と言っているが，これは電圧と言い替えても差し支えない．

式 (18) から，電場の周回積分はゼロと分かっている．従って，

$$\oint \nabla\phi \cdot \ell = 0 \tag{23}$$

となる．これは，微小区間での電位差 $\nabla\phi \cdot \ell$ を足しあわせて，任意の閉じた経路を積分するとゼロになると言っている．これは，回路で使うキルヒホッフの法則の片割れである．式 (23) は静電場で適用され，キルヒホッフの法則は交流のように時間的に変化する回路でも成立する—と言う反論がある．通常の回路の大きさは，その動作周波数の波長に比べて，十分小さい．そのため，電磁気学的に見ると，ほとんど静電場で近似できる．したがって，波長よりも十分小さい普通の回路では，式 (23) は良い近似となる．一方，波長が短くなり，回路と同程度の大きさになると，もはやキルヒホッフの法則は成り立たなくなる．

5　課題

5.1　問題

[問 1] 教科書の例題 1(p.20)

[問 2] 点電荷 Q が作る電場を，ガウスの法則より求めよ．

[問 3] 電荷が線密度 λ [C/m] で線状に分布している．電荷分布は直線上で無限に長く，その直径は無視できるとする．電場を求めよ．

[問 4] 電荷が密度 ρ [C/m^3] で半径 a の円柱状に分布している．円柱は無限に長いとして，その内外での電場を求めよ．

[問 5] 電荷が密度 σ [C/m^2] で無限に広い平面上 (平らな平面) に分布している．そのときの電場を求めよ．

5.2　レポート提出要領

提出方法は，次の通りとする．

期限	6 月 5 日 (火)PM 1:05 まで
用紙	A4
提出場所	山本研究室の入口のポスト，または講義開始時に手渡し
表紙	表紙を 1 枚つけて，以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電磁気学特論」 課題名「課題　静電場 (その 1)」 生産システム工学専攻　学籍番号　氏名 提出日
内容	問題の解答．計算課程をきちんと書くこと．

参考文献

[1] 山本義隆. 新・物理入門¡物理 IB・II. 駿台受験シリーズ. 駿台文庫, 1987.