スカラー場とベクトル場の積分

山本昌志*

2007 年 5 月 8 日

概 要

ベクトル場とスカラー場の勾配と発散，勾配の意味を説明する．これらの微分を先週の講義とは異なる方法で定義し，その意味を考える．そして，微分を積分した量も説明する．また，カーテシアン座標系での微分を計算し，先週の講義で導入したナブラ演算子を使った微分と同一になることを示す．

1 先週の復習と本日の授業内容

1.1 先週の復習

先週は，ベクトル場の微分について説明した．そこで，重要な結論は，次の通りであった．

- 微分演算子

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1}$$

  はベクトルのように振る舞う．

- この微分演算子は，スカラー場とベクトル場に作用する．

$$\text{勾配:スカラー場に作用してベクトル場を作る．} \qquad \nabla\phi \tag{2}$$

$$\text{発散:ベクトル場とのスカラー積で，スカラー場を作る．} \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A} \tag{3}$$

$$\text{回転:ベクトル場とのベクトル積で，ベクトル場を作る．} \qquad \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{4}$$

1.2 本日の授業内容

本日は，勾配・発散・回転の意味を説明し，その積分を考える．本日の授業の内容は，以下の通りである．

- スカラー場の勾配とその積分
- ベクトル場の発散とその積分
- ベクトル演の回転とその積分

ここでは，積分を考えるが，スカラー場やベクトル場のそのままの積分は興味が無い．それはそれで，地道に計算するしかなく，特別に説明することはない．微分したものを積分するとどうなるか考える．

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

2　1変数関数の微分と積分

2.1　微分

普通の滑らかな関数 $f(x)$ の微分 (導関数) を考える．これは，単純で

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

となる．これは，説明するまでもないであろう．関数の変化の差を変化量で割ったものの極限をとる操作を微分と言う．分母と分子，いずれもゼロに近づくが，分数の値はある一定の値に近づく．

ベクトルの微分も，ほとんど同じ考えである．後でのべるが，このことをよく理解しておく必要がある．

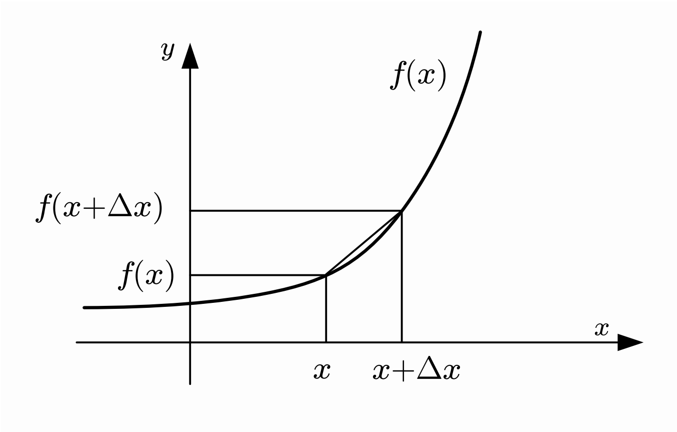

図 1: 普通の関数の微分

2.2　積分

つぎに，積分の重要な定理を示しておく．微分したもの—導関数—を積分すると，

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \tag{6}$$

となる．なーんだ，当たり前じゃないかと思うだろう．この式は，

- 微分した関数を積分した量は，関数の両端の値で決まる．

といっている．図 2 に示すように，途中の関数がどうであろうと，両端の値で決まるのである．

諸君は，とっくの昔にこのことは理解しているはずである．それならば，本日の学習内容のベクトル場やスカラー場の積分もすぐに理解できる．ほとんど同じように考えることができるからである．

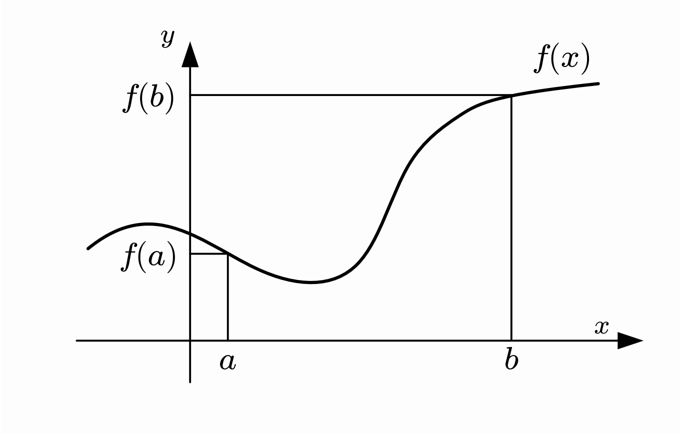

図 2: $f'(x)$ の積分の量は，積分区間の両端の値 $f(a)$ と $f(b)$ のみに依存する．途中の値に関係しない．

3　スカラー場の勾配と積分

3.1　勾配とは

3 次元のスカラー場を図にすることは大変なので，最初は 2 次元スカラー場を用いて説明する．ただ，3 次元でも全く同じことであることは頭の隅に入れておく必要がある．2 次元のスカラー場として，山の高さ h を考える．これは，位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y)$ の関数で $h(\boldsymbol{r})$ あるいは $h(x,\,y)$ と書くことができる．

ここで，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ だけ異なる位置の山の高さの差 $\mathrm{d}h$ を考える．これは，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}h &= h(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})-h(\boldsymbol{r}) \\
&= h(x+\mathrm{d}x,\,y+\mathrm{d}y)-h(x,\,y) \\
&\qquad (x,\,y)\text{ の周りでテーラー展開して，1 次の項のみをとると} \\
&= h(x,\,y)+\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y-h(x,\,y) \\
&= \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{7}
$$

となる．最後の式は全微分の式そのものなので，いきなりこれを書いても良い．ここでは，山の高さの差が

分かりやすいように，テーラー展開を用いて示しただけである．ところでこの式は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}h &= \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)\cdot(\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y) \\
&= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)h\right]\cdot(\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y) \\
&= (\nabla h)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&\qquad \text{括弧が無くても微分の順序は間違うことはないので} \\
&= \nabla h \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}
\end{aligned} \tag{8}
$$

と書くことができるであろう．最後の式がベクトルで表した山の高さの差である．先週示したように，∇h は h の勾配と呼ばれるベクトル量である．むろん，変位 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ はベクトル量である．そしてこれらのベクトル量のスカラー積は，2 点間の山の高さの差 $\mathrm{d}h$ を表し，それは明らかにスカラー量となる．山を歩いていて，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 移動すると，$\mathrm{d}h$ 標高が変化するということを表している．ただし，式 (8) は，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ がゼロの極限のみで正しいことを忘れてはならない．

ここで勾配 ∇h の意味を考えなくてはならない．勾配 ∇h はベクトル量なので方向と大きさを持っているはずである．方向はどっちを向いているのか?その大きさは?— ということである．それを考えるために，式 (8) を

$$
\mathrm{d}h = |\nabla h||\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\theta \tag{9}
$$

と書き換える．もちろん，θ は 2 つのベクトルの間の角度である．勾配は場の量として決まっているが，変位 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は任意にとれる．地形は変えられないが，そこを歩く人間はどの方向にも向かうことができる．ぐるっと見渡して，いろいろな方向に歩いてみる．同じだけ歩いてもっとも高く登れるのは，2 つのベクトルが同じ方向を向いている場合である．式 (9) から，当然である．このことから，勾配はスカラー場の変化が最も大きい方向に向かっているのである．具体的には，一歩を踏み出したとき，最も坂道のきつい方向が勾配 ∇h の方向である．

スカラー場を等高線で表すと勾配はそれと直角方向にスカラー場の値が大きくなる方向に向かってる．なぜならば，その方向が最も高さ変化が大きい方向となっているからである．式 (9) から，勾配の大きさはスカラー場の変化の割合を表していることがわかる．高さの変化の割合—山の傾斜—が勾配の大きさである．したがって，等高線の密度が詰まっているときに勾配は大きくなる．数学用語で勾配と言っているが，坂道を上るときの勾配と同じ—ということが理解できるであろう．スカラー場の微分 ∇h を勾配と言うのは，わかりやすい良い名前である．

ここでは 2 次元で話を進めたが，3 次元スカラー場でも全く同じである．3 次元の場合は，等高線ではなく等高面になる．この場合の勾配は，等高面に垂直で，スカラー場の値が大きくなる方向に向かっている．スカラー場の大きさは，等高面の間隔反比例しているのは 2 次元の場合と同じである．4 次元の場合はどうなるか?．これは絵ではかけないので，式で考えるしかない．ただし，同じ形をしている．

3.2　勾配の積分

式 (6) のように，微分したものの積分を考える．勾配を積分したらどうなるか—である．後で示すが，これは有用な面白い結果が得られる．それに対して，スカラー場，そのものの積分はつまらない．必要になったとき，勝手に計算すればよい．

スカラー場の勾配の積分を考えるために，2 つの場所 $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ の標高差を計算してみる．結論を先に言うと，これは勾配の積分として

$$h(\boldsymbol{r}_2)-h(\boldsymbol{r}_1)=\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\nabla h\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{10}$$

のように表すことができる．これは，正しそうであることが直感的にわかる．なぜならば，これは高さの変化 $\nabla h\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ を足しあわせている式となっているからである．

本当に正しいか?．標高差が $\boldsymbol{r}_1$ から $\boldsymbol{r}_2$ への経路に依存しないで，勾配の積分で表せることを確かめなくてはならない．これが確かめられると，勾配の積分の意味は，標高差を表すことがただちにわかる．

正しいことを確かめるために，ここでちょっとこの積分の意味を考えよう．積分の復習にもなるので丁度良い教材である．元々積分は，値とその微少量をかけて足しあわせる演算であった．次の式のようにである．

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\nabla h\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\sum_i\nabla h_i\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i \tag{11}$$

これは，ちょうど図 3 のように表せる．積分のパスを分割して，それぞれの場所での勾配と変位の内積を計算して足しあわせる．そして，変位を無限小にした場合の和が積分である．

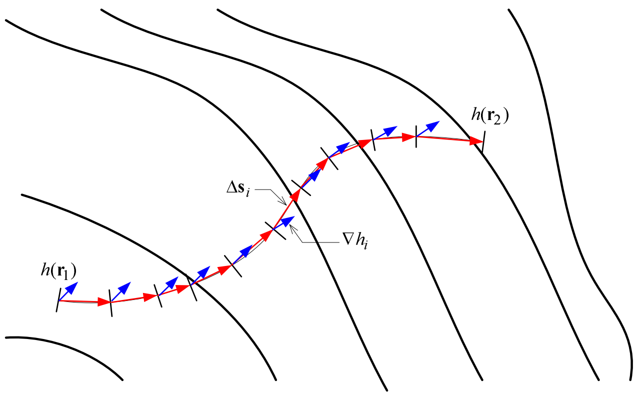

図 3: 積分を和として表す

次に，式 (11) の和を考える．微少量の内積を図 4 に示す．これは，式 (8) から，

$$\nabla h_i\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i=h_{i+1}-h_i \tag{12}$$

となる．積分路を N 分割したとして，それを足しあわせると，

$$\sum_{i=1}^{N}\nabla h_i\cdot\Delta\boldsymbol{s}_i=h_{N+1}-h_1 \tag{13}$$

となる．ここで，$\Delta \boldsymbol{s}_i$ をゼロに近づけた極限では，h_1 は $h(\boldsymbol{r}_1)$ で，h_N は $h(\boldsymbol{r}_2)$ である．従って，式 (10) が証明できた．これまでの議論から，積分路に依存しないことも明らかであろう．

これも 2 次元で考えたが，3 次元に拡張しても一般的に成り立つ．ϕ を 3 次元のスカラー場とすると，

$$\phi(\boldsymbol{r}_2) - \phi(\boldsymbol{r}_1) = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{14}$$

である．スカラー場の差は，勾配を積分すれば得られるのである．

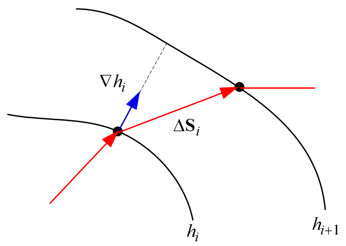

図 4: 微小領域の積分

4　ベクトル場の発散と積分

4.1　発散とは

この場合は，2 次元で考えるのはやっかいなので 3 次元で考えることにする．3 次元の閉じた空間内での熱の流れを考える．単位面積，単位時間あたりの熱の流れ [Jule/(m^{2}sec)] はベクトル場である．これを $\boldsymbol{A}$ で表すことにする．ここでは，この空間から出入りする熱量の総和を考える．この閉じた空間の表面の微少面積 $\mathrm{d}S$ から出ていく熱量 $\mathrm{d}Q$ は，

$$\mathrm{d}Q = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{15}$$

である．ここで，$\boldsymbol{n}$ は図 5 この微少面積の法線方向の単位ベクトルである．この熱の流れのベクトルと面積の内積を熱流束 (一般にはフラックス) と言う．この式から，空間から出入りするトータルの熱量は，

$$Q = \int_V \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{16}$$

となる．

次に，先ほどの空間を図 6 のように V_1 と V_2 の 2 つの部分に分割した場合を考える．この場合，閉じた空間からの熱量の出入りの総和は，それぞれの部分の熱流速を足しあわせれば良い．すなわち

$$Q = \int_{V_1} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \int_{V_2} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{17}$$

である．先ほどの式 (16) と同じになる理由は，以下のことから分かる．

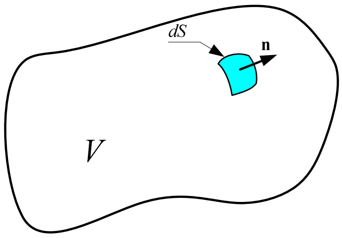

図 5: 熱の流出を考える空間とその表面

- V と，V_1 あるいは V_2 の共通の表面の部分は変わらない．
- V と積分が異なるのは，図 6 の S' の部分である．この部分では，V_1 と V_2 での熱の流れのベクトルは同一である．しかし，積分をする場合の法線の方向が反対で，$\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$ の関係がある．すると，この部分での積分は，V_1 と V_2 を足しあわせるとキャンセルされる．

先ほどは 2 つに分割したが，この分割方法は任意で 2 つ以上に分割しても良いことは明らかである．図 7 のようににに N 個に分割した場合は，

$$Q = \sum_i \int_{\Delta V_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{18}$$

である．これを非常に大きな数で分割して，$\Delta V_i \to 0$ の極限を考える．すると，

$$\begin{aligned} Q &= \sum_i \int_{\Delta V_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \\ &= \sum_i \left[\frac{\int_{\Delta V_i} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S}{\Delta V_i} \right] \Delta V_i \\ &= \int_V \left[\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S}{\Delta V} \right] \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{19}$$

である．ここで，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S}{\Delta V} \tag{20}$$

とする．先週示した $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ という微分がいきなり現れているが，この右辺と等しいことは後で示す．式 (20) の右辺が発散と呼ばれるスカラー量で，ベクトル場の微分を表す．これが微分になっていることの感触は，式 (1) から汲み取ってほしい．

この発散を用いると，トータルの熱量は，

$$Q = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V \tag{21}$$

となる．式 (16) と比べると，

$$\int_V \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V \tag{22}$$

である．これをガウスの発散定理といい，熱にこだわらずどんなベクトル場についても成り立つ．この定理は,「微分の体積積分は表面での面積分に置き換えることができる」と言っている．式 (2) のように，微分したものの積分の値は端—ここでは表面—で決まるのである．

ここで考えた熱流速の場合，発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ は単位体積あたりの熱の出入りを表している．これは，その微少体積で熱が発生量を表している．そのため，発散とは言わずにこの微分を「湧き出し」と呼ぶ人もいる．

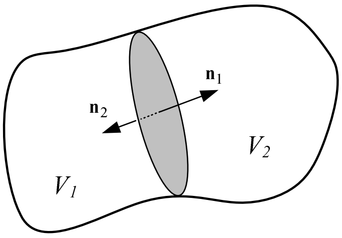

図 6: 2 分割

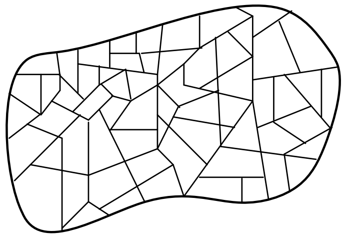

図 7: 微小な区間に分割

4.2 カーテシアン座標系での発散

発散は式 (20) で定義されるベクトル場の微分である．実際の微分について，カーテシアン座標系で考える．ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ があったとする．それは座標の関数で，$\boldsymbol{A}(x, y, z)$ と書けるであろう．図 8 に示したような微少な空間でのそのフラックス F を考える．まずは，xy 平面である．これは，z と $z+\Delta z$ の面のフラックスを足しあわせれば良い．

$$
\begin{aligned}
F_z &= F\left(x+\frac{\Delta x}{2},\, y+\frac{\Delta y}{2},\, z+\Delta z\right) + F\left(x+\frac{\Delta x}{2},\, y+\frac{\Delta y}{2},\, z\right) \\
&= \boldsymbol{A}\left(x+\frac{\Delta x}{2},\, y+\frac{\Delta y}{2},\, z+\Delta z\right)\cdot \boldsymbol{n}_1 \Delta x \Delta y + \boldsymbol{A}\left(x+\frac{\Delta x}{2},\, y+\frac{\Delta y}{2},\, z\right)\cdot \boldsymbol{n}_0 \Delta x \Delta y \\
&\qquad \boldsymbol{n}_1 = (0,0,1),\ \boldsymbol{n}_0 = (0,0,-1) \text{ なので} \\
&= A_z\left(x+\frac{\Delta x}{2},\, y+\frac{\Delta y}{2},\, z+\Delta z\right)\Delta x \Delta y - A_z\left(x+\frac{\Delta x}{2},\, y+\frac{\Delta y}{2},\, z\right)\Delta x \Delta y \\
&= \left[A_z\left(x+\frac{\Delta x}{2},\, y+\frac{\Delta y}{2},\, z+\Delta z\right) - A_z\left(x+\frac{\Delta x}{2},\, y+\frac{\Delta y}{2},\, z\right)\right]\Delta x \Delta y \\
&\qquad (x,y,z) \text{ の周りで，テイラー展開すると} \\
&= \left[\left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta z\right) - \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta x \Delta y \\
&= \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z
\end{aligned}
\tag{23}
$$

yz, zx 平面も同様にして，

$$
F_x = \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \qquad\qquad F_y = \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z \tag{24}
$$

となる．

　これから発散は，

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \lim_{V\to 0}\frac{\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S}{V} \\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{F_x+F_y+F_z}{\Delta x\Delta y\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z} \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (25)
\end{aligned}
$$

となる．

　これは，先週示した式と同じである．また，円柱座標系や極座標系については，私の web ページ[1] ページを見よ．

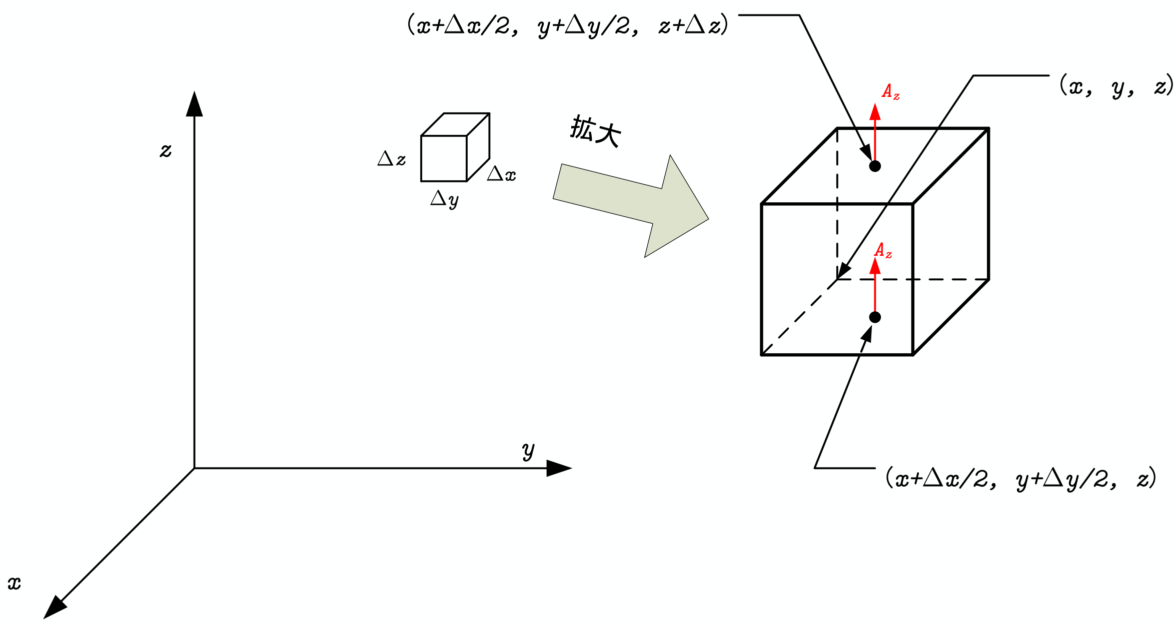

図 8: 発散を考える座標系

[1]http://www.akita-nct.jp/ yamamoto/study/electromagnetics/coodinate_transform/html/index.html

4.3　発散を計る

数式がごちゃごちゃ並んだので，発散の意味がぼやけてきたと思う．熱の流れがある場で，その発散を計る機械を考えよう．図 9 のような機械で発散が計れる．正方形の熱の流れを測定するセンサーを 6 つ組み合わせて，立方体内部でのねつの収支を計る．熱の収支の合計を立方体の体積で割ることにより，立方体内部での平均の発散が分かる．

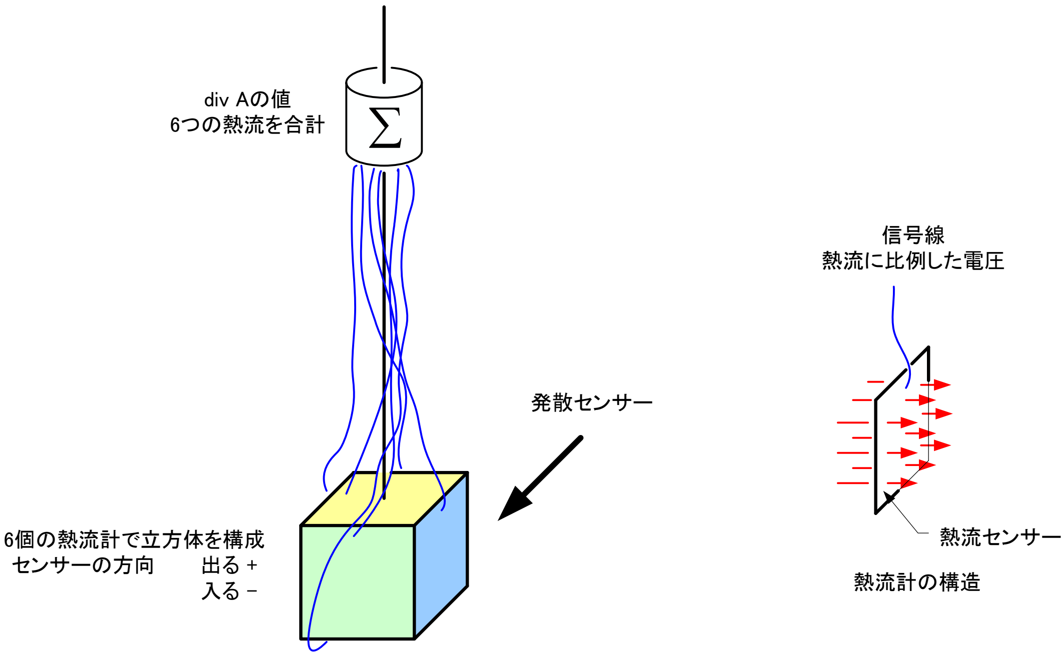

図 9: 熱の発散を計る機械．熱流系で構成する立方体の実際のサイズは，小さいとする．

5　ベクトル場の回転と積分

5.1　回転とは

回転についても，発散と全く同じように議論を進める．回転のイメージを持つためには，流体を考えるのが良いであろう．非圧縮性流体の速度場を考える．速度なのでこれは，ベクトル場である．それが回転しているか否かを考えることにする．速度場のベクトルを $\boldsymbol{A}$ で表し，回転 Ω を

$$\Omega = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{26}$$

と定義する．この積分は図 10 のように，ベクトル場を線積分する．ぐるっと一周して，そこの値がゼロとなっていれば回転が無いというのは，直感的には理解できる．閉じた紐を流れのある流体に入れて，それが回転するか否か—を言っているのでる．

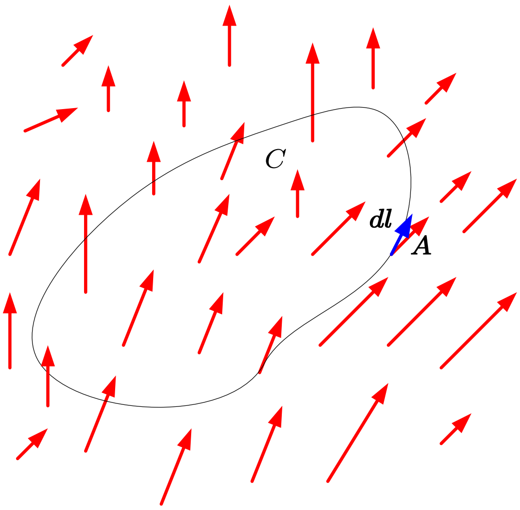

図 10: 流体の速度場と回転を計算する経路

この積分は，図 11 のように，2 つに分割しても値は変わらない．

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \oint_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \oint_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{27}$$

C で積分するときの経路と C_1 と C_2 で積分するときの経路で異なるのは，分割線の部分である．ここでは，C_1 と C_2 のベクトル場は同じで，積分の方向が反対である．それ故. 足しあわせるとキャンセルされる．図 12 のように分割をもっともっと多くしても，同じことが成り立つ．

$$\Omega = \sum_i \oint_{C_i} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{28}$$

発散の時と同様に，無限に多くの分割を行い，それぞれの積分経路の面積をゼロにした極限を考える．すると，

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_i \oint_{C_i} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\ &= \sum_i \left[\frac{\oint_{C_i} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\Delta S_i}\right]\Delta S_i \\ &= \int_S \left[\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\Delta S}\right]\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{29}$$

となる．

ここで，積分内の $\lim_{\Delta S\to 0}\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}/\Delta S$ を考える．これは，ΔS の向きに応じて値が異なることは，容易に分かる．流れのある流体内部に小さい輪っかを入れた場合，その輪の向きにより，回転数は変わる．そのことから，この極限操作を伴う量はベクトルの成分であることが想像できる．ここでは，時間の都合からベクトルであることの証明は行わないが，ベクトルになっている．その方向は，経路を右ねじにする向きである．

従って，

$$\nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\Delta S} \tag{30}$$

と定義する量を考えることができる．ここで $\boldsymbol{n}$ は，この積分を行う領域の面の法線方向の単位ベクトルで，積分領域の右ねじの向きとする．右辺はスカラー量なので，$\nabla \times \boldsymbol{A}$ は回転と呼ばれるベクトル量である．

先週示した $\nabla \times \boldsymbol{A}$ という微分がいきなり現れているが，この右辺と等しいことは後で示す．式 (30) の右辺が回転と呼ばれるベクトル量で，ベクトル場の微分を表す．これが微分になっていることの感触は，式 (1) から汲み取ってほしい．

この回転を用いると

$$\Omega = \int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{31}$$

となる．式 (26) と比べると，

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{32}$$

である．これをストークスの定理という．これは,「回転と言われる微分の面積分は，その面の縁の線積分に等しいと言っている．式 (2) のように，微分したものの積分の値は端—ここでは縁—で決まるのである．

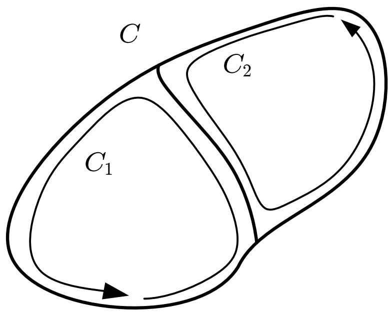

図 11: 2 分割

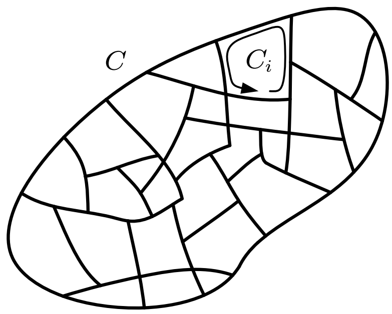

図 12: 微小な区間に分割

5.2　カーテシアン座標系での回転

回転は，式 (30) で定義されるベクトル場の微分である．これをカーテシアン座標系で考える．ここに，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ があったとし，それが (x, y, z) の関数であったとする．これをある xy 平面で見ると，図 13 の

ようになる．この面の微小領域の回転を考えよう．それは，

$$
\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= A_x\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,z\right)\Delta x + A_y\left(x+\Delta x,y+\frac{\Delta y}{2},z\right)\Delta y \\
&\qquad - A_x\left(x+\frac{\Delta x}{2},y+\Delta y,z\right)\Delta x - A_y\left(x,y+\frac{\Delta y}{2},z\right)\Delta y \\
&= \left[A_y\left(x+\Delta x,y+\frac{\Delta y}{2},z\right) - A_y\left(x,y+\frac{\Delta y}{2},z\right)\right]\Delta y \\
&\qquad - \left[A_x\left(x+\frac{\Delta x}{2},y+\Delta y,z\right) - A_x\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,z\right)\right]\Delta x \\
&\qquad (x,y,z)\text{ の周りで，テイラー展開すると} \\
&= \left[\left(A_y+\frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right) - \left(A_y+\frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta y \\
&\qquad - \left[\left(A_x+\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y\right) - \left(A_x+\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\Delta x \\
&= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y
\end{aligned} \tag{33}
$$

となる．従って，z の回転は，式 (30) より，

$$
\begin{aligned}
(\nabla\times A)_z &= \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\Delta S} \\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y}{\Delta x\Delta y} \\
&= \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}
\end{aligned} \tag{34}
$$

同様に，x や y 方向の回転を求めると，

$$
(\nabla\times A)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad\qquad (\nabla\times A)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{35}
$$

となる．

これは，先週示した式と同じである．また，円柱座標系や極座標系については，私の web ページ[2] を見よ．

5.3 回転を計る

数式がごちゃごちゃ並んだので，発散の意味がぼやけてきたと思う．流れのある場での回転を計る機械を考える．図 14 のような機械で回転を計測することができる．単位時間あたりの回転数を，回転計の軸の方向が回転 $(\nabla\times\boldsymbol{A})$ の成分となる．場の回転—ベクトル量—の方向と大きさを知りたければ，回転系の軸を回して，最大の回転スピードになるところを捜す．

[2]http://www.akita-nct.jp/ yamamoto/study/electromagnetics/coodinate_transform/html/index.html

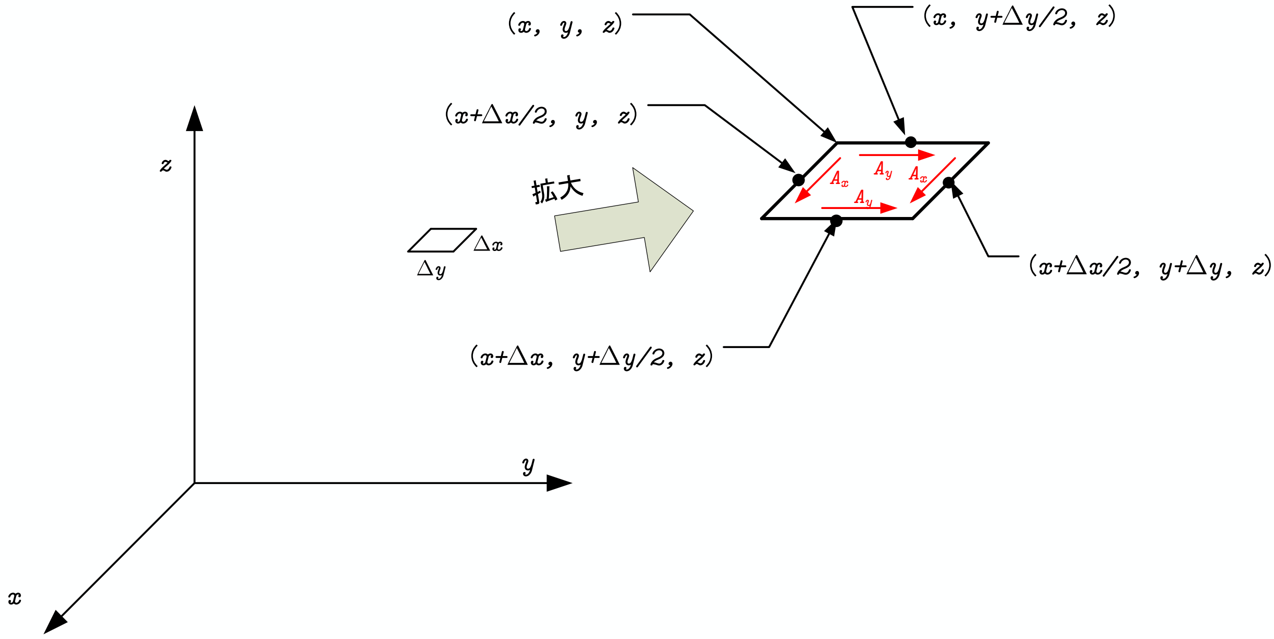

図 13: 回転を考える座標系

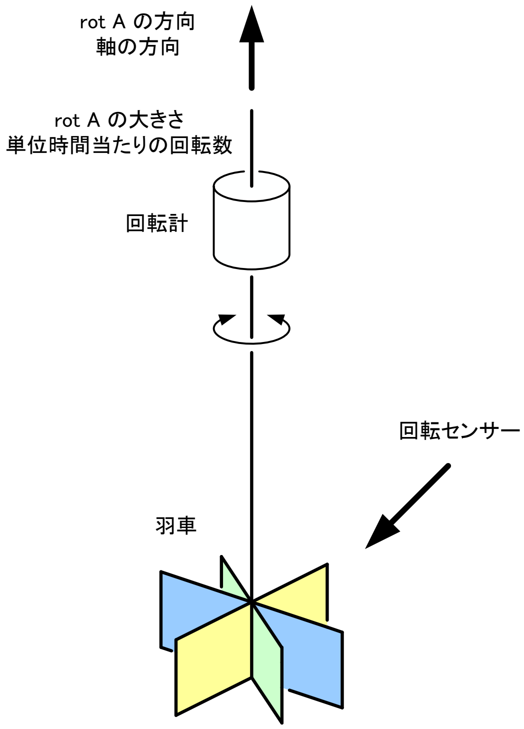

図 14: 回転を計る機械．羽車は小さいとする．

6 課題

[問 1] カーテシアン座標系 $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ での勾配を表す式を導け．自分の考えで，導くこと．

[問 2] カーテシアン座標系での発散を表す式を導け．

[問 3] カーテシアン座標系での回転を表す式を導け．

[問 4] 以下は，余力のある者のみトライせよ．課題とはしないが，計算してみよ．

- 円柱座標系で同じことをしてみよ．
- 球座標系でも考えてみよ．