

# スカラー積とベクトル積

山本昌志\*

2007年4月17日

## 概要

スカラー積とベクトル積を説明する。

## 1 内積 (スカラー積)

### 1.1 内積が現れる演算

エネルギーは「力 × 距離」とよく表現される。例えば、重力場に質量  $m$  の物体があり、それを垂直に  $r$  だけ手で移動させたとする。実際には、物体は鉛直方向に重力により引っ張られており、その力は  $mg$  である。その力に抗して、手はそれと同じ大きさで反対方向に力  $F$  を加え、物体を  $r$  引き上げたことになる。この場合、この物体の位置エネルギー (ポテンシャル) の増加  $\Delta U$  は、 $Fr$  となるのは力学で学習したとおりである。

今度は、先ほどと同じ距離で、物体を真横に移動させたとする。この場合、位置エネルギーの変化  $\Delta U$  はゼロである。また、斜めに移動させた場合は、 $\Delta U = Fr \cos \theta$  となる。これは、高さの変化分が、位置エネルギーの変化になるからである。手の力の方向は、この3とおりの場合まったく同じで、垂直方向である。この垂直方向の力  $F$  と移動方向との角度を  $\theta$  とすると、3通りとも同じ式

$$\Delta U = Fr \cos \theta \quad (1)$$

でエネルギーの変化をあらわすことができる。

ちょっと余談であるが、これまで、3通りの方法で物体を移動させた。図を見て分かるように、物体を移動させるとき手にかかる力は同じである。同じ力なのに、移動方向が違うのである。厳密に考えると、移動が始まる瞬間に加速度が生じその力が本当は必要なのであるが、ここでは無視している。ゆっくり、本当にゆっくり移動させたことを考えるのである。もう少し思考実験を進めると、手と物体との間にばね秤をつけると、力の様子が分かる。本当にゆっくり動かせば、3通りの移動ともばね秤が示す重さは  $m$  で力が同じであることが分かるであろう。

話は元に戻るが、力と物体の移動量はベクトル量なので  $F, r$  と書いたほうが格好良い<sup>1</sup>。そうすると、位置エネルギーの変化は、

$$\Delta U = |\mathbf{F}| |\mathbf{r}| \cos \theta \quad (2)$$

\*国立秋田工業高等専門学校 生産システム工学専攻

<sup>1</sup>先ほどはノーマル書体で書きスカラー量のように取り扱ったが、ベクトル量なのでボールド書体で書いた。

となる．この式の右辺が内積 (スカラー積) の演算である．

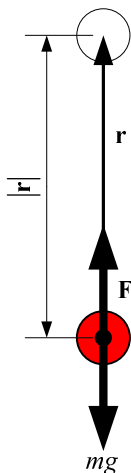


図 1: 垂直方向への移動

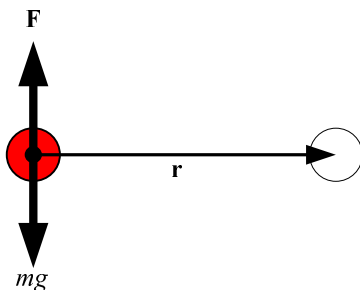


図 2: 水平方向への移動

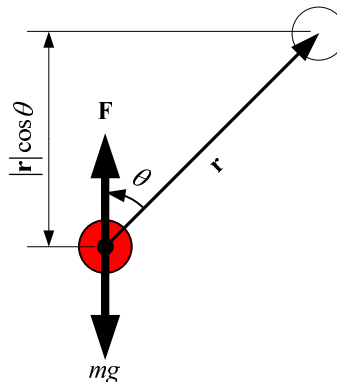


図 3: 斜めへの移動

## 1.2 内積 (スカラー積) の定義

前回の講義で示したように， $z$  軸を中心として回転させた場合，座標の変換は次のようになる．

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad z' = z \quad (3)$$

ベクトル量の各軸の成分も座標の回転により変化する．その変化は，座標の変換と同じである．

$$F'_x = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta \quad F'_y = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta \quad F'_z = F_z \quad (4)$$

ここで，スカラー量というものを定義する．それは，座標軸を変えても，変化しない量とする．例えば，原点からの距離  $|r|$  を考える．直感的にこれは座標軸を変えても変化しないと分かる．座標変換の式を使い，ちゃんと計算してみる．距離は平方根の計算が含まれて厄介なので，その 2 乗  $|r|^2$  を計算する．式 (3) から，

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 + (-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 + z^2 \\ &= x^2 \cos^2 \theta + 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta - 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \cos^2 \theta + z^2 \\ &= (x^2 + y^2) \cos^2 \theta + (x^2 + y^2) \sin^2 \theta + z^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 \quad (6)$$

となる．これから，距離の 2 乗  $|r|^2$  は座標系を回転させても変化しない量であることがわかる．このような量がスカラー量である．同じように，式 (4) から，ベクトルの大きさもスカラー量であることが分かる．すなわち

$$F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z = F^2_x + F^2_y + F^2_z \quad (7)$$

である。

ベクトルの大きさの計算と全く同じようにして、ベクトル  $A$  と  $B$  の積、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (8)$$

もスカラー量となる。この演算は、座標系を回転させても、同じ値となる。この証明は課題とする。これは、スカラー積 (内積) と呼ばれる演算である。次に、最初のエネルギーの話のときできてきたコサインを使った演算と、この内積が等しいことを示す。すなわち

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (9)$$

を証明したい。ここで、 $\theta$  はベクトル  $A$  と  $B$  の間の角度である。これを証明するために、座標を回転させる。左辺はスカラー量であるため、座標系を回転させても値は変わらない。座標回転後の新しい  $x$  軸を  $A$  の方向にする。すると、ベクトル  $B$  と  $x$  軸の間の角度は  $\theta$  となる。 $B$  と  $y, z$  軸との角度を  $\zeta, \eta$  とすると、新たな座標系でのベクトルの成分は、

$$A_x = |\mathbf{A}| \quad A_y = 0 \quad A_z = 0 \quad (10)$$

$$B_x = |\mathbf{B}| \cos \theta \quad B_y = |\mathbf{B}| \cos \zeta \quad B_z = |\mathbf{B}| \cos \eta \quad (11)$$

となる。 $\cos \theta, \cos \zeta, \cos \eta$  はそれぞれの軸との方向余弦である。従って、内積の定義より、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \end{aligned} \quad (12)$$

となる。これを内積の第二の定義と考えることができる。実際には、式 (8) と式 (12) の簡単な方を使えば良い。また、スカラー積の定義から、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (13)$$

であることが直ちに分かる。この演算では交換法則が成り立っている。

本日、最初に示した位置エネルギーの変化  $\Delta U = |\mathbf{F}| |\mathbf{r}| \cos \theta$  は内積の演算になっていることが分かる。

$$\Delta U = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \quad (14)$$

そして、これはスカラー量となる。エネルギーはスカラー量なので当然の結果である。

最後に  $x, y, z$  軸の単位ベクトル  $i, j, k$  の内積の演算を示しておく。

$$\begin{aligned} i \cdot i &= 1 & i \cdot j &= 0 & i \cdot k &= 0 \\ j \cdot i &= 0 & j \cdot j &= 1 & j \cdot k &= 0 \\ k \cdot i &= 0 & k \cdot j &= 0 & k \cdot k &= 1 \end{aligned} \quad (15)$$

## 2 外積 (ベクトル積)

### 2.1 ベクトル積が表れる演算

角運動量は「回転中心からの距離  $\times$  運動量」である。例えば、図 4 の場合を考える。ある質点が  $y$  軸に沿って運動しているとする。自由運動の場合、角運動量は変化せず、図中の 3 点で同一である。この場合、

原点の  $z$  軸周りの角運動量は

$$L_z = |\mathbf{r}||\mathbf{P}|\sin\theta \quad (16)$$

である．エネルギーとは異なり，今度は  $\sin$  がかかっている．このようなベクトルのかけ算に外積（ベクトル積）がしばしば現れる．このように  $\sin$  がかかることにより角運動量が一定であることがわかる．

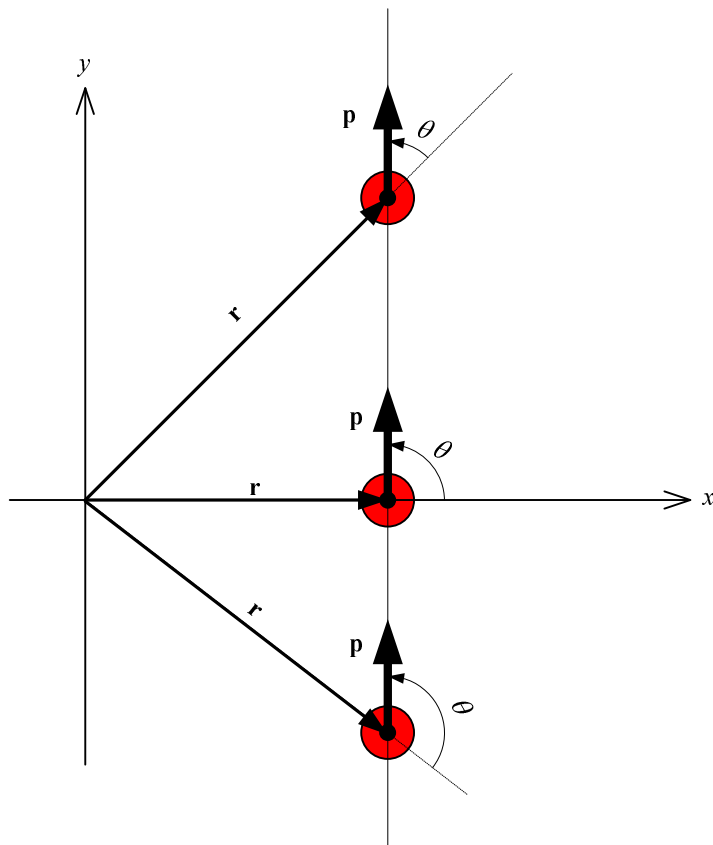


図 4: 角運動量

## 2.2 ベクトル積の定義

角運動量やトルクなどを取り扱う場合に便利のようにベクトル積を定義する．それは，

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (17)$$

と書かれる．演算の結果の  $\mathbf{C}$  はベクトルである．その大きさは，

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta \quad (18)$$

とする．ここで， $\theta$  はそれぞれのベクトルの間の角度である．一方，その方向は  $A$  と  $B$  の定める平面に垂直で， $A, B, C$  が右手系を作る向きとする．このように方向を定めると，

$$A \times B = -B \times A \quad (19)$$

となる．積の順序を入れ替えると，符号が反対になるのである．内積の場合と異なり，かけ算の順序は重要となる．

ベクトル積の幾何学的な意味を考えよう．式 (17) の演算は，図 5 のようになる． $A$  と  $B$  で定まる平行四辺形の底面を  $A$  とすると，高さは  $|B| \sin \theta$  となる．従ってその面積は， $|A||B| \sin \theta$  と直ちに分かる．これは， $|A \times B|$  に等しい．このことから， $A \times B$  のベクトル積は， $A$  と  $B$  で定まる平行四辺形の面積を大きさとして，その平行四辺形の平面に垂直な方向のベクトルという幾何学的な意味があることが理解できる．

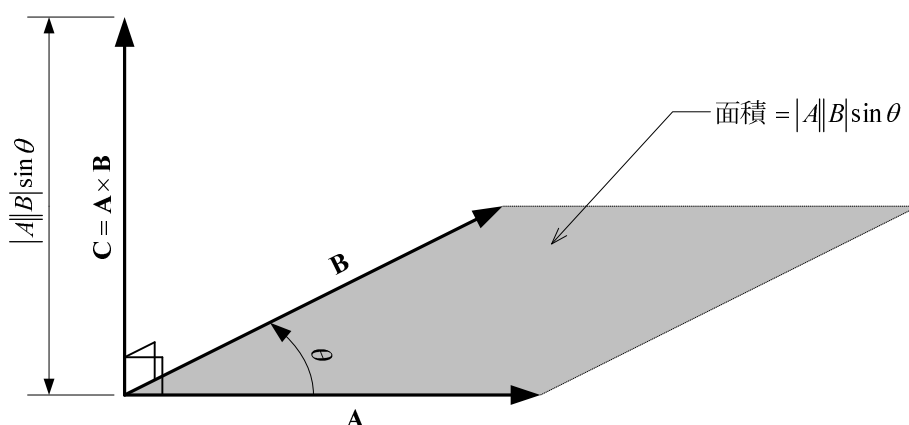


図 5: ベクトル積の幾何学的意味

定義から，単位ベクトル同士のベクトル積の演算は簡単に求めることができる． $x, y, z$  軸の単位ベクトル  $i, j, k$  の演算は，次のとおりである．

$$\begin{aligned} i \times i = 0 & \quad i \times j = k & \quad i \times k = -j \\ j \times i = -k & \quad j \times j = 0 & \quad j \times k = i \\ k \times i = j & \quad k \times j = -i & \quad k \times k = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

これは， $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i \dots$  のようにサイクリックに変化し，この方向にベクトル積をかける場合は正，反対の場合は負と覚える．

これを使って，ベクトルの成分で考える．ベクトル  $A = A_x i + A_y j + A_z k$  と  $B = B_x i + B_y j + B_z k$  の

ベクトル積は，

$$\begin{aligned}
 C &= A \times B \\
 &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\
 &= A_x B_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + A_x B_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + A_x B_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\
 &\quad A_y B_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + A_y B_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + A_y B_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\
 &\quad A_z B_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + A_z B_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + A_z B_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) + \\
 &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{21}$$

となる．これから，ベクトル積の演算を成分で表すと

$$\begin{aligned}
 C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\
 C_y &= A_z B_x - A_x B_z \\
 C_z &= A_x B_y - A_y B_x
 \end{aligned} \tag{22}$$

となる．この式は，覚えにくいので，行列式を用いて

$$\begin{aligned}
 A \times B &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\
 &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{23}$$

と表すことがよくある．この行列式を用いた表現は便利なので憶えておく方が良いだろう．

$A \times B$  がベクトルになることの証明はしていない．座標軸を回転させた場合のその成分の振る舞いを考えなくてはならない．興味がある者はトライしてみるのが良いだろう．ここでは示さないが，このベクトル積の計算結果はベクトルになるのはたしかである．

### 3 ベクトルの3重積

3つのベクトルの積の演算のうち， $A \cdot (B \times C)$  と  $A \times (B \times C)$  は，電磁気学でしばしばあらわれる．前者をスカラー3重積，後者はベクトル3重積と呼ぶ．ここではこれらのベクトルの演算について述べる．

#### 3.1 スカラー3重積

##### 3.1.1 対称性

$A \cdot (B \times C)$  の演算結果はスカラーになる．まず括弧内の外積  $B \times C$  はベクトルになり，それとベクトル  $A$  との内積はスカラーになるからである．そのため，スカラー3重積と呼ばれる．

スカラー3重積  $A \cdot (B \times C)$  は，括弧を省いて， $A \cdot B \times C$  と書かれることもある．この場合でも，ベクトル積  $B \times C$  の演算を優先する． $A \cdot B$  の演算を先にすると，これがスカラーになり演算を続行することが不可能となるからである．

スカラー 3 重積の性質をカーテシアン座標系で確かめる．成分で表したスカラー 3 重積は，

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\ &= A_x B_y C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y - A_x B_z C_y - A_y B_x C_z - A_z B_y C_x \end{aligned} \quad (24)$$

となる．これは対称性の良い式である．各項はそれぞれのベクトルの成分を一つ含む．それを  $A, B, C$  の順序で並べると， $(x, y, z)$  のサイクリックに並んだとき正に，その逆の  $(z, y, x)$  のサイクリックに並んだとき負になる．このことから，元の式  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  のベクトルはサイクリックに入れ替えても値は変わらないといえる．そして，逆に巡回させると符号が逆になることも分かる．すなわち，

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (25)$$

である．もっとも，負になる場合はベクトル積の入れ替えは負になることから分かる．これがスカラー 3 重積の最初の重要な性質である．

### 3.1.2 幾何学的な意味

つぎにこのスカラー 3 重積の幾何学的な意味を考える．図 6 に示すようにスカラー 3 重積の値は，3 つのベクトルが作る並行 6 面体の体積になる．ベクトル  $B$  と  $C$  が作る平行四辺形の面積  $S$  は

$$S = |\mathbf{B} \times \mathbf{C}| \quad (26)$$

となる．そして，この  $B$  と  $C$  が作る平行四辺形の対面との高さ  $h$  は

$$h = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{C}}{|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|} \cdot \mathbf{A} \quad (27)$$

である．したがって，並行 6 面体の体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= Sh \\ &= |\mathbf{B} \times \mathbf{C}| \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{C}}{|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|} \cdot \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \end{aligned} \quad (28)$$

となる．この式からわかるようにスカラー 3 重積は，それぞれのベクトルが作る並行 6 面体の体積になっている．ただし，スカラー 3 重積が負にもなるので注意が必要である．負の場合は，その絶対値が体積になる．

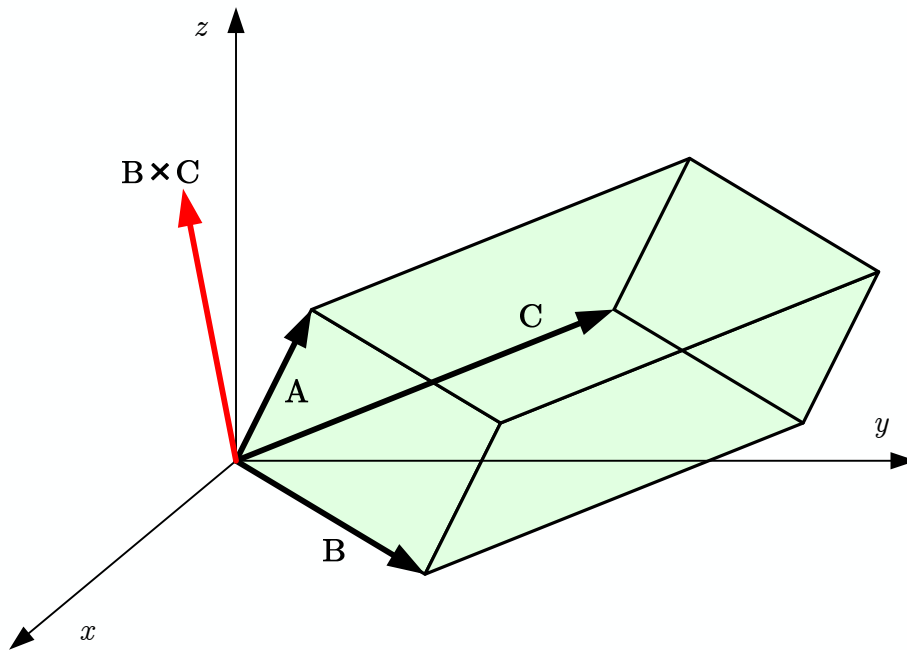


図 6: スカラー 3 重積の幾何学的意味 . 3 つのベクトルが作る並行 6 面体の体積になる .

### 3.1.3 行列式との関係

もっと興味深いのは、行列式との関係である . 式 (24) から、スカラー 3 重積は行列式を用いて、

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (29)$$

と書くことができる . これで、極めて見通しのよい式になった . これで、 $A, B, C$  をサイクリックに入れ替えても値が変わらないし、逆順だと負の符号がつくこともわかる .

一方、3 つのベクトルの体積になっていることも分かる . 行列式のイメージは体積だ ! これは線形代数の基本である . これは 3 次元のみならず、2 次元—この場合は面積—でも、4 次元でも  $n$  次元でも同じイメージである .

## 3.2 ベクトル 3 重積

おそらく、電磁気学ではスカラー 3 重積よりもベクトル 3 重積の方が重要であろう . いろいろな場面でこのベクトル 3 重積

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (30)$$



が表れる．スカラー 3 重積の場合と異なり，括弧を省略してはならない．なぜならば，

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C \quad (31)$$

となるからである．これは単純な例を考えれば分かる．例えば， $A = i, B = i, C = j$  と

$$A \times (B \times C) = i \times (i \times j) = -j \quad (32)$$

$$(A \times B) \times C = (i \times i) \times j = 0 \quad (33)$$

が得られる．明らかに，括弧の位置で演算結果が異なる．

ベクトル 3 重積の証明は，諸君の課題とする．カーテシアン座標系で右辺と左辺の成分を計算して，等しいことを示せばよい．カーテシアン座標系で成り立てば，他の座標系でも同じように成り立つ．なぜならば，式 (30) は，ベクトルなので座標系に依存しない量になっているはずであるからである．

ベクトル 3 重積について，簡単に幾何学的な考察を行う．ベクトル積  $(B \times C)$  の演算結果は，ベクトル  $B$  にも  $C$  にも垂直の方向を向いている．それと  $A$  とのベクトル積もまた垂直になる．これから，ベクトル 3 重積の  $A \times (B \times C)$  の方向について，て次のことが言える．

- ベクトル  $B$  と  $C$  が作る平面内にある．
- ベクトル  $A$  と垂直である．

このうち，最初の結論は重要である．ベクトルの 3 重積は  $B$  と  $C$  の一時結合で表すことができると言っている! 式 (30) は  $B$  と  $C$  の一時結合になっている．

## 4 ベクトルの積の重要公式

$$A \cdot B = A \cdot B \quad A \times B = -B \times A \quad (34)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (35)$$

$$(\alpha A) \cdot B = \alpha(A \cdot B) \quad (\alpha A) \times B = \alpha(A \times B) \quad (36)$$

$$A \text{ と } B \text{ が垂直ならば } A \cdot B = 0 \quad A \text{ と } B \text{ が並行ならば } A \times B = 0 \quad (37)$$

$$A \cdot (A \times B) = 0 \quad A \times A = 0 \quad (38)$$

$$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C \quad (39)$$

$$A \times B \times C = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (40)$$

## 5 課題

[問 1] 2 次元カーテシアン座標系の回転を表す行列の逆行列を求めよ．

[問 2] その逆行列は，元の行列の転置行列になっていることを示せ．

- [問 3] 2つのベクトル  $A$  と  $B$  の内積が，スカラー量であることを示せ．
- [問 4]  $A = (a_x, a_y, a_z)$  ,  $B = (b_x, b_y, b_z)$  の時， $A \cdot B$  と  $A \times B$  を示せ．
- [問 5]  $A = (1, 0, 0)$  ,  $B = (0, 1, 0)$  のとき，内積 ( $A \cdot B$ ) と外積 ( $A \times B$ ) および ( $B \times A$ ) を計算せよ．
- [問 6]  $A = (1, 0, 0)$  ,  $B = (1, 0, 0)$  のとき，内積 ( $A \cdot B$ ) と外積 ( $A \times B$ ) および ( $B \times A$ ) を計算せよ．
- [問 7] 内積の演算を利用して，ベクトル  $A = i$  と  $B = 5i + 5j$  の間の角度を求めよ．
- [問 8]  $A = (1, 2, 3)$  ,  $B = (4, 5, 6)$  のとき，スカラー積 ( $A \cdot B$ ) とベクトル積 ( $A \times B$ ) および ( $B \times A$ ) を計算せよ．さらに，スカラー積の演算結果からそれぞれベクトルのなす角を計算せよ．同様にベクトル積の演算結果からそれぞれのベクトルのなす角を計算せよ．
- [問 9] スカラー積の演算を利用して，余弦定理を導け．ヒント：図 7 を見よ．
- [問 10] ベクトル積の演算を利用して，正弦定理を導け．ヒント：図 7 を見よ．
- [問 11]  $xy$  平面上の 3 点  $(1, 2)$ ,  $(5, 8)$ ,  $(4, -3)$  を頂点とする三角形の面積を求めよ．
- [問 12] ベクトル 3 重積の式 (30) を証明せよ．
- [問 13] プリントを 3 回読んで，間違いや表現の悪いところ，わかり難いところを指摘せよ．
- [問 14] 今回の授業内容でわからなかった部分を具体的に述べよ．

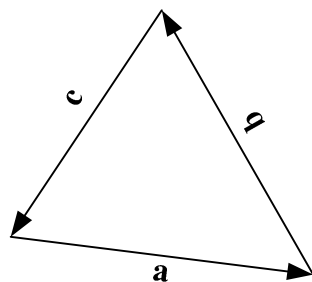


図 7: 三角形をベクトルで表す。

## 付録 A ベクトル量とスカラー量の定義

### 付録 A.1 ベクトル量とは

前回の授業で示したように、ベクトルの成分は座標軸に依存している。座標軸が異なると、その 3 成分は異なる。座標軸を回転させた場合、ベクトルの成分の変換は、座標系の変換と同じである。具体的には、座標系を  $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$  と回転させる。この回転を

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (41)$$

と行列を用いて表現する<sup>2</sup>。(x, y, z) 座標系の時のベクトル  $\mathbf{A}$  の成分を  $(E_x, E_y, E_z)$ 、 $(x', y', z')$  座標系では  $(E'_x, E'_y, E'_z)$  とする。これらの成分の関係は、

$$\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (42)$$

となる。式 (41) と式 (42) を見て分かるように、回転に対して座標の変換とベクトルの成分の変換は全く同じように取り扱われるのである。このように座標の回転と同じように、その成分が変換されるものをベクトルと定義する。これは、ベクトルが、空間に固定された幾何学的な矢と思えば当たり前のことである。そんなに当たり前でもないかも …

### 付録 A.2 スカラー量とは

スカラー量は、座標の回転により変化しない量と定義する。たとえば、ベクトルの大きさの 2 乗

$$|\mathbf{E}|^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \quad (43)$$

はスカラー量である。この量は座標系の回転に関係なく一定の値である。ベクトルは空間に固定された矢であり、その長さの 2 乗であるから当然のように思える。実際にそれを確認してみよう。式 (41) と式 (42) の回転を表す行列とベクトルを

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (44)$$

<sup>2</sup>3 次元の回転を表す行列の具体的な形は、オイラーの角を勉強せよ。

と表現する．すると， $E' = AE$ である．そして， $|E'|^2 = E'^T E'$ である．回転後の座標系でのベクトルの大きさの2乗は

$$\begin{aligned}
 |E'|^2 &= E'^T E' \\
 &= (AE)^T AE \\
 &= E^T A^T AE \\
 &\quad \text{式 (62) より } A^T = A^{-1} \\
 &= E^T A^{-1} AE \\
 &= E^T E \\
 &= |E|^2
 \end{aligned} \tag{45}$$

となる．回転前後で，ベクトルの大きさは変化しない．従って，これはスカラー量である．

スカラー量は座標系が回転しても，その値は変わらない．このように回転に対して不変な量をスカラー量と定義する．あるスカラー量  $\phi$  が与えられたとすると，この場合，座標系を言う必要はない．空間のある点の温度は，座標系を回転させても変化しない．ベクトルの成分の場合，座標軸が異なるとそれは変化すると大きな違いである．

## 付録 B 回転を表す行列

先週の講義では，2次元を用いて座標変換の具体的な行列を示した．ここでは，より一般的な3次元の座標変換の行列の性質を示す．ここでは，3次元で議論を進めるが，さらに高次元でも成り立つ．このあたりの話は，文献 [1] を参考にした．

図 8 のように 3次元座標の原点を固定して，それを回転させたとする．ここで，それぞれの軸には単位ベクトルの関係を考える．それぞれの軸の単位ベクトルの大きさは 1 で，直交している．従って，元の座標系では，

$$i \cdot i = 1 \qquad j \cdot j = 1 \qquad k \cdot k = 1 \tag{46}$$

$$i \cdot j = 0 \qquad j \cdot k = 0 \qquad k \cdot i = 0 \tag{47}$$

となる．最初の 3つの式が，ベクトルの大きさが 1 であることを示している．次の 3つの式が直行関係を表している．同じように回転した座標系でも

$$i' \cdot i' = 1 \qquad j' \cdot j' = 1 \qquad k' \cdot k' = 1 \tag{48}$$

$$i' \cdot j' = 0 \qquad j' \cdot k' = 0 \qquad k' \cdot i' = 0 \tag{49}$$

である．それらは基底ベクトルにとることができるので，任意のベクトルを線形和で表現できる．回転した軸の単位ベクトル  $i, j, k$  も，元の座標の単位ベクトルの線形和で表すことができる．すなわち，

$$\begin{aligned}
 i' &= a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k \\
 j' &= a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k \\
 k' &= a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k
 \end{aligned} \tag{50}$$

である。

これら，単位行列を表す係数  $a_{ij}$  の性質を調べる．そこで，回転した座標の単位行列の内積を計算する．先ほどの直交関係を利用すると，

$$\begin{aligned} i' \cdot i' &= (a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k) \cdot (a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k) \\ &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \end{aligned} \quad (51)$$

となる．ベクトル  $i$  の大きさは 1 なので，

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \quad (52)$$

を導くことができる．ほかの軸でも同様な操作を行うと，

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 \quad a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \quad (53)$$

が得られる．次に，他の軸との内積を計算する．それは，

$$\begin{aligned} i' \cdot j' &= (a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k) \cdot (a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k) \\ &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} \end{aligned} \quad (54)$$

となる．ベクトル  $i'$  と  $j'$  は直交しているので，

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 \quad (55)$$

である．同様に，

$$a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0 \quad a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0 \quad (56)$$

が得られる．ここで，得られた結果をまとめると，

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \quad (57)$$

となる．ここで， $\delta_{ij}$  はクロネッカーの記号と呼ばれ，

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ の場合} \\ 0 & i \neq j \text{ の場合} \end{cases} \quad (58)$$

と言う意味がある．

ここで，行列  $A$  として

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (59)$$

を導入する．転置行列は，

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (60)$$

となる．すると，式 (57) は

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \quad (61)$$

と書き直すことができる．ここで， $\mathbf{I}$  は単位行列である．この式から，行列  $\mathbf{A}$  は直交行列となっていることが分かる．この式から，転置行列が  $\mathbf{A}$  の逆行列になっていることがわかる．すなわち，

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad (62)$$

である．

この行列  $\mathbf{A}$  をつかうと，回転した座標系の単位ベクトルを表す式 (50) は，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (63)$$

$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$  なので，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} \quad (64)$$

となる．

この行列  $\mathbf{A}$  は座標軸を回転させたとき，座標の成分の変換を表すことを示す．いま，任意の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を 2 つの座標系で考える．これは，どちらの座標系から見ても同じベクトルなので，

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ &= x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \end{aligned} \quad (65)$$

と書くことができる．したがって，

$$x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

式 (64) をつかうと

$$\begin{aligned} &= x(a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k}) + y(a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k}) + z(a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}) \\ &= (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)\mathbf{i} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\mathbf{j} + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (66)$$

となる．これらが等しくなるためには，左右のベクトルの係数が等しくなる必要がある．したがって，

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \quad (67)$$

である．これを，行列を使った表現にすると，

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (68)$$

となる．すなわち，単位ベクトルの変換を表す行列は，座標変換を表す行列と同じである．

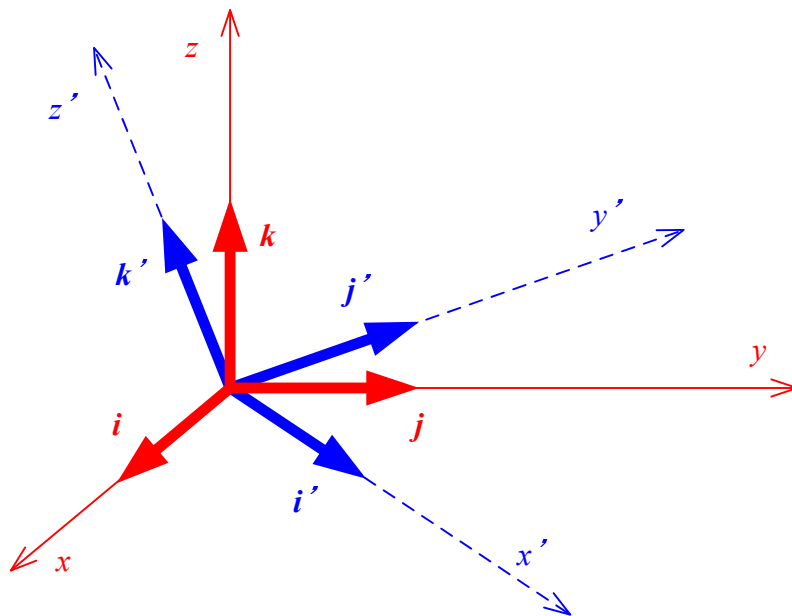


図 8: 3次元の座標回転

## 参考文献

- [1] 和達三樹. 物理のための数学. 物理のための入門コース 10. 岩波書店, 2002.