電磁波

山本昌志*

2007 年 7 月 24 日

概 要

マクスウェルの方程式には，電磁波と呼ばれる波を表す解が存在することを示す．そして，その性質を論じる．

1　本日の授業内容

本日は，マクスウェルの方程式から導かれるもののうち，もっともドラマチックな内容の一つ，電磁波について，説明する．

2　自由空間内の電磁波の波動方程式

2.1　電磁場の波動方程式

この講義の最初に，遠隔作用と近接作用 (場の採用) の考え方を示した．そのときに，遠隔作用の考え方が困難をきたす場合として，電波の話をした．いよいよその電波の話をする時がきた．

静電場の場合，遠隔作用であろうが近接作用であろうがその現象は変わらなかった．近接作用，すなわち場の考え方を採用した方が計算は容易であったことは確かであるが，物理現象は同じように説明できた．電磁場の振動の周波数が高くなると，その考えは出来なくなる．それは，どうしてだろうか?．それについては，最後に述べることにしよう．

最初に，真空で電荷や電流が存在しない自由空間の電磁場を考える．電荷や電流が存在しない空間だから，電場や磁場もゼロと考えるかもしれない．今までの話だと，電場や磁場の源は，電荷や電流と言ってきたので，そう思っても仕方がない．実際にどうなっているか，マクスウェルの方程式から考えることにしよう．自由空間では，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

となる．明らかに，$\boldsymbol{B}=0$ と $\boldsymbol{E}=0$ は，この微分方程式の解となっている．電場も磁場もない状態はありうるのである．しかし，解はそれだけだろうか?．他にも解はないだろうか?．探してみることにする．

この方程式を直接計算することは，明らかに計算が大変である．ベクトルの連立偏微分方程式になっているからである．ベクトルの部分は成分に分ければスカラーの方程式にする事ができる．電場と磁場の連立になっていることは，計算を進める上で問題である．電場あるいは磁場の単独の式にしたい．自由空間のマクスウェルの方程式を眺めると分かるが，式 (3) の両辺の回転を取ると

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\
&\qquad \text{式 (4) より} \\
&= \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となり，電場のみの式にできる．ここで，右辺第一項であるが，これはベクトル恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ を使い[1]，

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\
&\qquad \text{式 (1) より} \\
&= -\nabla^2\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

と変形できる．これで，電場のみの式となった．

同じことを磁場に適用する．式 (4) の両辺の回転をとることから始めると，

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{E}) \\
&\qquad \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}\text{と式 (3) より} \\
&= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\
&\qquad \text{式 (2) より} \\
&= -\nabla^2\boldsymbol{B}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

が得られる．

以上の操作により，自由空間中での電場と磁場を表す 2 組の方程式

$$
\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{8}
$$

$$
\nabla^2\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0 \tag{9}
$$

が得られた．この方程式は，物理的には何を意味しているのだろうか?．以前の講義で話したように，カーテシアン座標系のラプラス演算子は，

$$
\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{10}
$$

[1] ∇^2 はラプラス演算子で，第 3 回の講義で説明した．

となる．また，電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{B}$ は，ベクトルなのでカーテシアン座標系の成分で表現できる．これから，先の方程式 (8) や (9) はカーテシアン座標系では，

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0 \tag{11}$$
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0 \tag{12}$$
$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}=0 \tag{13}$$
$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}=0 \tag{14}$$
$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}=0 \tag{15}$$
$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}=0 \tag{16}$$

と書き改められる．このように 6 組の偏微分方程式が得られる．

この方程式は，どこかで見覚えがあるはずである．波動方程式である．電磁場の波動方程式となっている．このようになると，近接作用の考えが生きてくる．遠隔作用の考えでは波動方程式などでてこないのである．さて，この近接作用が確固たるものになるためには電磁場の波を観測しなくてはならない．1888 年にヘルツによって，その波が観測されたのである．物理学上のもっともドラマチックな実験に違いない．理論から予言された電磁波が本当にあったのである．この電磁波の発見は，その後の科学技術に多大な貢献をした．その内容は言うまでもないだろう．

古代の磁石や静電気の研究から始まり，エルステッドやクーロン，アンペール，ファラデー，その他多くの先人の研究は，マクスウェルにより完全な方程式となり，最後にヘルツが決定的な実験をして，電磁気学は完成したのである．そのあと，アインシュタインが出てきて，電磁気学と古典力学の矛盾を解決したのである．

よちよち歩きの赤ちゃんは，現代社会の繁栄をもたらす巨人として成長したのである[2]．

2.2 波動方程式 (復習)

たぶん，諸君が最初に学習した波動方程式は，1 次元で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{17}$$

のようになっていたはずである．u が波の振幅，x が位置，t が時刻を表す．そして，v が波の位相速度になる．昔，学習した弦の方程式を思い出して欲しい．このときは，u が弦の変位であったはずである．

波は重ね合わせの原理が成り立つことはよく知られた事実である．だから，遠くまでの通信ができるのである．$f_1(x,t)$ と $f_2(x,t)$ が式 (17) が解ならば，任意定数 C_1 と C_2 をつかって

$$u(x,t)=C_1 f_1(x,t)+C_2 f_2(x,t) \tag{18}$$

[2]あるとき，ファラデーは,「結局、その電気と言う物はなんの役に立つのですか?」と質問を受けた．それに対して,「生まれたばかりの赤ん坊が将来どう活躍するかなど、一体誰が分かりますか?」と答えたということである．これは，私の好きな話．

も解となることが重ね合わせの原理である．この新しい関数 $u(x,t)$ も解となっていることは，元の波動方程式に代入してみれば明らかである．

それでは，波動方程式の一般解を求めることにしよう．式 (17) は

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(x,t)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)\end{aligned} \tag{19}$$

と書き換えることができるので，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \text{または} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{20}$$

ならば，元の波動方程式の解となる．最初の偏微分方程式の解は，

$$u(x,t) = f_+(x - vt) \tag{21}$$

となることが分かる．本当かどうかは，これを元の式 (20) の最初に代入してみればよい．明らかに成り立つはずである．同様に，2 番目の偏微分方程式の解は，

$$u(x,t) = f_-(x + vt) \tag{22}$$

となることがわかる．最初の $f_+(x-vt)$ は進行波，$f_-(x+vt)$ は進行波は後進波を表す．これは，f_+ や f_- として，正弦波を当てはめて計算してみれば直ちに理解できる．

最初に述べたように波動方程式の解は重ね合わせの原理が成り立つ．したがって，先ほどの 2 つの解は結合されて

$$u(x,t) = f_+(x - vt) + f_-(x + vt) \tag{23}$$

と書き表すことができる．要するに，波動方程式の解は進行波と後進波の和になるのである．もし，f_+ と f_- の関数の形が同一ならば，それは定在波となる．この辺の話や位相速度や群速度の話もしなくてはならないと思うが，この講義では時間がないので省く．波を取り扱うような仕事に就いたならば，自分で学習せよ．世の中には良い教科書がいっぱいある．

ここでは，波動方程式の解としてダランベールの解を示した．しかし，諸君は 4 年生の応用解析では，式 (17) を変数分離して解いたはずである．変数分離で解いたものがダランベールの解になっていることを確認してみるとよい．また，電気の学生は 5 年生の計算機応用で，波動方程式を差分で計算したはずである．このように様々な方法で，波動方程式は解くことができる．問題に適した方法で計算できるようになる必要がある．なぜならば，波動方程式は自然科学の分野でかなりポピュラーな微分方程式で，しばしばお目にかかるからである．

風呂に入っているとき，水面を静かにして，水滴を一滴落とし，波面が広がる様子をときどき観察する．落下した水滴により，孤立波が発生し，それが静かに円形に広がり，壁に衝突する．壁に衝突した反射波もまた円形に広がる．私は，このように波がきれいに広がることが信じられず，大きな感動を覚えるのである．流体のように粘性が支配するような媒質でも，あのようにきれいに波が広がることは私にはまったく信じられない．

3 電磁波

ここでは，先ほどの電磁場の波動方程式のもっとも単純な解である三次元平面波について，カーテシアン座標系で考察する．

3.1 3 次元平面波

先程述べたように，自由空間の電場を表す式 (8) は波動方程式で，その解は波になっている．波といってもベクトルである電場の波である．この解として

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t+\theta_1) \tag{24}$$

を仮定する．ここで，$\boldsymbol{k}_1$ は波数ベクトルと呼ばれるものである．一次元問題の波数 $(k=2\pi/\lambda)$ に対応するものである．この解の式のパラメーターを適当に決めれば，これは元の波動方程式の解の一つになることは自明であろう．

$\boldsymbol{k}_1$ はベクトルで，

$$\boldsymbol{k}=(k_{1x},k_{1y},k_{1z}) \tag{25}$$

と成分で書き表すことができる．もちろん，$\boldsymbol{r}$ は位置を表すベクトルなので

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z) \tag{26}$$

である．従って，式 (24) 中の $\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}$ は，$k_xx+k_yy+k_zz$ と書き表すことができる．このことを理解すると，式 (24) を成分を用いて書き表すと

$$E_x=E_{0x}\sin(k_{1x}x+k_{1y}y+k_{1z}z-\omega_1 t+\theta_1) \tag{27}$$
$$E_y=E_{0y}\sin(k_{1x}x+k_{1y}y+k_{1z}z-\omega_1 t+\theta_1) \tag{28}$$
$$E_z=E_{0z}\sin(k_{1x}x+k_{1y}y+k_{1z}z-\omega_1 t+\theta_1) \tag{29}$$

となる．これで，ベクトルの波を表す式 (24) がわかった．

次に波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の意味を考える．式 (24) 中の $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t$ は，位相である．そこで，この位相一定が場所 $\boldsymbol{r}$，すなわち波面がどうなっているか考える．一定の位相を ϕ_0 とすると，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t=\phi_0$ なので，

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=\phi_0+\omega t \tag{30}$$

となる．もちろん，波面はある瞬間の状態なので，同じ波面の上では右辺は一定の値となる．このことから，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ が一定の値の場所を結ぶと波面となることがわかるだろう．もちろん，$\boldsymbol{k}$ は波によって決まった値なので，定数である．従って，3 次元空間中のこれが一定の値になる場所 $\boldsymbol{r}$ を探すことになる．式 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ は，$\boldsymbol{r}$ ベクトルの $\boldsymbol{k}$ 軸への射影と考えることができる．これが一定の面は，図 1 のように平面となることは明らかである．そして，この平面 (波面) は $\boldsymbol{k}$ と垂直になり，$\boldsymbol{k}$ の方向に移動する．これは，Δt 秒後の波面を考えれば明らかである．

もう少しこれを定量的に評価することにすることが良いだろう．t と $t + \Delta t$ 秒の位相 ϕ_0 の波面の位置をそれぞれ，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ とすると

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = \phi_0 + \omega t \tag{31}$$

$$\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}) = \phi_0 + \omega(t + \Delta t) \tag{32}$$

となる．この式の辺々を引くと

$$\boldsymbol{k} \cdot \Delta\boldsymbol{r} = \omega\Delta t \tag{33}$$

となる．この式の意味は，成分で書き表すと

$$k_x\Delta x = \omega\Delta t \qquad k_y\Delta y = \omega\Delta t \qquad k_z\Delta z = \omega\Delta t \tag{34}$$

となり，かなりわかりやすくなる．これから波面の速度は，

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_x} \qquad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_y} \qquad v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_z} \tag{35}$$

と書き表すことができる．これは，波面の移動する速度で，位相速度と呼ばれる．これまでの話で，これが位相速度と呼ばれる理由がわかっただろう．成分で表された位相速度をベクトルで書き表すと，

$$\boldsymbol{v} = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} \tag{36}$$

となる．右辺の $\omega/|\boldsymbol{k}|$ は速度の大きさを，$\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ は方向を表す単位ベクトルになっているのである．

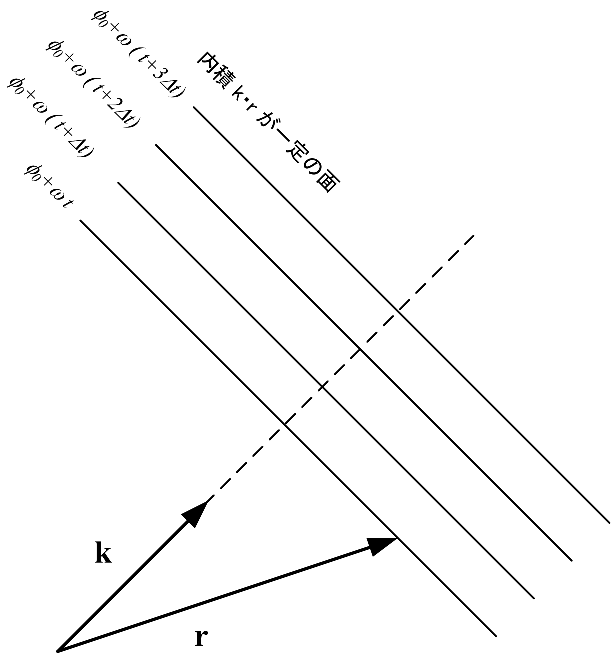

図 1: 波面と波数ベクトル k との関係

これまでの話で，式 (24) が 3 次元の平面波を表すことがわかった．この平面波がマクスウェルの方程式から導かれた波動方程式 (8) の解になっているためには，パラメーターである角振動数 ω_1 と波数 $\boldsymbol{k}_1$ はどのような関係になっている必要があるだろうか?．それを調べるためには，式 (24) を式 (8) の中に入れてみれば良い．すると，

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\left(\nabla^2-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} \tag{37}$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(E_x,E_y,E_z)\sin(k_{1x}x+k_{1y}y+k_{1z}z-\omega_1 t+\theta_1) \tag{38}$$

$$=-(E_x,E_y,E_z)(k_{1x}^2+k_{1y}^2+k_{1z}^2-\varepsilon_0\mu_0\omega_1^2)\sin(k_{1x}x+k_{1y}y+k_{1z}z-\omega_1 t+\theta_1) \tag{39}$$

となる．式 (8) の要請により，この右辺は恒等的にゼロになる必要がある．任意の電場，任意の場所で，いつでもこの式が成り立つためには，

$$k_{1x}^2+k_{1y}^2+k_{1z}^2-\varepsilon_0\mu_0\omega_1^2=0 \tag{40}$$

とならなければならない．波数ベクトル $\boldsymbol{k}_1$ と角振動数 ω_1 の関係を表したこのような式のことを分散関係と言う．媒質中の波の性質を表す大事な関係である．

この式をつかって，波の速度を計算してみよう．波の速度の大きさは，式 (36) から，

$$\begin{aligned}v&=\frac{\omega_1}{|\boldsymbol{k}_1|}\\&=\sqrt{\frac{\omega_1^2}{k_{1x}^2+k_{1y}^2+k_{1z}^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\end{aligned} \tag{41}$$

となることがわかる．これから，電磁波の速度は誘電率と透磁率から求めることができる．誘電率は $\varepsilon_0=8.854\times10^{12}$，透磁率は $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ である．これから，電磁波の速度は 2.997×10^8 となる．

これは，光の速度と同じである．実は，光は電磁波なのである．これからは，光の速度を c として，

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{42}$$

の記号を用いることにする．それにしても，磁石や静電気の現象が光と関係しているのは驚きである．

今までは，電場の平面波について論じて，式 (24) が自由空間中のマクスウェルの方程式の解の一つになっていることを示した．同様に磁場の平面波も

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_0\sin(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t+\theta_2) \tag{43}$$

マクスウェルの方程式の解になっているのは明らかである．なぜならば，電場 $\boldsymbol{E}$ も磁場 $\boldsymbol{B}$ も同じ式なので，同じ解がある．

3.2 横波としての電磁波

波動方程式の解となってる $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ を自由空間のマクスウェルの方程式の式 (1) から (4) に当てはめて，真の解の条件を捜す．

3.2.1 波の進行方向と電場

次に，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$，そして波の移動方向 $\boldsymbol{k}$ の関係を調べる．まずは電場で，式 (1) に平面波の式 (24) を代入すると，

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{E} &= \nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t+\theta_1)] \\
&= (\nabla\cdot\boldsymbol{E_0})\sin(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t+\theta_1)+\boldsymbol{E_0}\cdot\nabla\left[\sin(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t+\theta_1)\right] \\
&\qquad \boldsymbol{E_0}\text{ は定ベクトルなので，}\nabla\cdot\boldsymbol{E_0}\text{ はゼロであるので} \\
&= (E_{0x},E_{0y},E_{0z})\cdot(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\sin(k_{1x}x+k_{1y}y+k_{1z}z-\omega_1 t+\theta_1) \\
&= (E_{0x},E_{0y},E_{0z})\cdot(k_{1x},k_{1y},k_{1z})\cos(k_{1x}x+k_{1y}y+k_{1z}z-\omega t+\theta_1) \\
&= \boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}_1\cos(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t+\theta_1)
\end{aligned} \tag{44}$$

となる．自由空間では，$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ は恒等的にゼロなので，この式の右辺も恒等的にゼロとなる必要がある．これが，いつでもどこでも成り立つためには，

$$\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}_1=0 \tag{45}$$

でなくてはならない．これは，電場と平面波の進む方向が直交していると言っている．

3.2.2 波の進行方向と磁場

電場の波の式 (24) と磁場の波の式 (43) は全く同じ形をしている．また，電場の発散の式 (1) と磁場の発散の式 (2) も同じ形をしている．したがって，磁場の場合も

$$\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k}_2=0 \tag{46}$$

が成り立つ．やはり，磁場と平面波の進む方向は直交しているのである．

3.2.3 残りのマクスウェルの方程式

平面波について，マクスウェルの方程式の (1) と (2) が成立するためには，その進行方向と電場および磁場の方向が直交する必要があった．残りの方程式については，どうだろうか?.

まずは，式 (3) を考える．この式の左辺は

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} &= \nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t+\theta_1)]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{B}_0\sin(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t+\theta_2)\right] \\
&\qquad \text{ベクトル恒等式，}\nabla\times\phi\boldsymbol{A}=\nabla\phi\times\boldsymbol{A}+\phi(\nabla\times\boldsymbol{A})\text{ を使うと} \\
&= \nabla\left[\sin(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t+\theta_1)\right]\times\boldsymbol{E}_0+\sin(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t+\theta_1)\nabla\times\boldsymbol{E}_0+\omega_2\boldsymbol{B}_0\cos(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t+\theta_2) \\
&\qquad E_0\text{ は定ベクトルなので，}\nabla\times\boldsymbol{E}_0\text{ はゼロである} \\
&= \boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t+\theta_1)+\omega_2\boldsymbol{B}_0\cos(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t+\theta_2)
\end{aligned} \tag{47}$$

となる．これが，恒等的にゼロにならなくてはならない．いつでも，どこでもそれが成り立つためには，

$$\boldsymbol{k}_1 \times \boldsymbol{E}_0 + \omega_2 \boldsymbol{B}_0 = 0 \qquad \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 \qquad \omega_1 = \omega_2 \qquad \theta_1 = \theta_2 \tag{48}$$

となる必要がある．電場と磁場の波の周波数と波数，位相が等しいのである．さらに，電場と磁場，波の進む方向の 3 つは直交していることが分かる．以降，紙面の節約のために，ω_1 と ω_2 は ω，$\boldsymbol{k}_1$ と $\boldsymbol{k}_2$ は $\boldsymbol{k}$，θ_1 と θ_2 は θ と書く．

これまでの全ての議論から，

- 電場と磁場，波の進む方向は全て直交している．
- 電場と磁場は同じ振動数，同じ波数，同じ位相である．

ということがわかった．

残りは，マクスウェルの方程式の (4) である．この式を計算しやすくするために，$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ を使って

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{49}$$

と書き直しておく．この式は (4) とほとんど同じなので，電場や磁場の波の式を代入した結果は，

$$(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_0 + \frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E}_0)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \theta) = 0 \tag{50}$$

と直ちにわかる．これが，いつでもどこでも成り立つためには

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_0 + \frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E}_0 = 0 \tag{51}$$

である．やはり，電場と磁場，電場と波の方向は直交している．

これまでのところ，電場と磁場，波の進む方向がおのおの直交しいれば，波の方程式 (24) と (43) は同時に成り立つことが分かった．条件は，それだけでよいのだろうか?．まだだめである．式 (48) と式 (51) が連立して成立する必要がある．これは，

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0 = -\omega \boldsymbol{B}_0 \tag{52}$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E}_0 \tag{53}$$

と書き改められる．電場 $\boldsymbol{E}_0$ と磁場 $\boldsymbol{B}_0$，波の進む方向 $\boldsymbol{k}$ は全て直交しているので，この式が表すベクトルの大きさの関係は，

$$kE_0 = \omega B_0 \tag{54}$$

$$kB_0 = \frac{\omega}{c^2}E_0 \tag{55}$$

と容易に導くことができる．これから，直ちに

$$\frac{E_0}{B_0} = c \tag{56}$$

となる．真空中の電磁波は，電場と磁場の比がいつも一定なのである．

この式から，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ の関係をつかって，

$$\begin{aligned}\frac{E_0}{H_0}&=\mu_0 c\\&=376.73\end{aligned}\tag{57}$$

と言う式が導かれる．技術者はこの関係を憶えている．この 376.7[Ω] を自由空間のインピーダンスと言う．電場 E の単位は [V/m]，磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ の単位は [A/m] である．したがって，E_0/H_0 の単位は [V/A] すなわち [Ω] となる．

4　電磁波のエネルギー

ここで，求めた自由空間の電磁波のエネルギーについて考えてみる．

4.1　ポインティングベクトル

まずは，ポインティングベクトルの復習である．ポインティングベクトルはエネルギーの流れの密度を表した．前回の講義と異なった方法で説明しよう．実際は同じことであるが，簡単に説明する．ベクトル恒等式とマクスウェルの方程式から，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})&=\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}\\&=-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{E}\cdot\left(\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\\&=-\mu\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}-\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\\&=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right)-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\end{aligned}\tag{58}$$

が得られる．これを任意の領域で体積積分を行う．左辺は，ガウスの定理により表面積分になるので，

$$\int_S\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left(\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}+\frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V+\int_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}V=0\tag{59}$$

が得られる．ここの左辺の第二項は単位時間あたりの電磁場のエネルギーの変化を表す．第三項の電流密度 $\boldsymbol{j}$ は $\rho\boldsymbol{v}$ となる．$\rho\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}$ は，粒子が単位時間あたりに得るエネルギーである．したがって，第二項と三項は体積 V 中の単位時間あたりのエネルギーの変化を表す．エネルギー保存則が成り立つとすれば，

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\tag{60}$$

は単位時間，単位面積あたりのエネルギーの流れになるはずである．これは，発見者の名前をとってポインティングベクトルと呼ばれている．

ポインティングベクトルの次元を調べてみると，エネルギー密度の流れになっている．電場 E の単位は [V/m]，磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ の単位は [A/m] である．したがって，ポインティングベクトルの単位は [VA/m^2] となり，[W/m^2] = [J sec^{-1} m^{-2}] と書き改めることができる．たしかに，エネルギー密度の流れになっている．

4.2 平面波のエネルギーのながれ

先ほど求めた平面波のエネルギーの流れを考える．平面波のエネルギーの密度は分かっている．平面波の速度も光速 c と分かっている．したがって，単位時間に単位面積，通過する平面波のエネルギーがわかる．このようにして計算した結果とポインティングベクトルから計算した結果は，教科書の通り，一致する．各自，調べよ．