後期中間試験解答用紙 (5E 情報理論)

電気工学科　　学籍番号　　　　氏名

2008 年 2 月 7 日

1 計算の方法

[問 1] $\boxed{\textit{10 点}}$

例えば，10! は，次のようにして計算する．

```
N ← 10
fact ← 1
while k ≦ N do
    fact ← fact×k
    k ← k+1
done
write(N,fact)
```

[問 2] $\boxed{\textit{10 点}}$

$N!$ を計算する関数の例を以下に示す．

```
fact(N)=
    if N=0 then return 1
        else return N×fact(N-1)
    endif
```

[問 3] $\boxed{\textit{10 点}}$

(p, s) の組み合わせて，ループ中のそれらの値の変化を示す．以下は，done の直前の値である．

```
(1,1)  (2,4)  (3,9)  (4,16)  (5,25)
```

[問 4] $\boxed{\textit{8 点}}$

p と s には，次の関係がある．

$$s = p^2$$

[証明] 計算の手続きより，明らかに

$$s = \sum_{k=0}^{n}(2k+1) \qquad\qquad p = n+1$$

が成り立つ．計算を進めると，

$$\begin{aligned} s &= \sum_{k=0}^{p-1}(2k+1) \\ &= 2\left(\frac{p-1}{2}p\right) + p \\ &= p^2 \end{aligned}$$

が得られる．

2　問題の解き方

[問 1] 10 点

出力は，左から 000011000011 となる．この FSM は，それまでに入力された 1 の個数が 3 の倍数の時に 1 を出力する．

[問 2] 20 点

チューリング機械を下図にしめす．これは，無限に長いテープとそれを読み書きでき，左右に移動でき内部状態を持つヘッドからできている．このチューリング機械の 1 サイクルの動作は，つぎの通りである．

1. テープに書かれている記録 S_i をヘッドが読み取る．
2. 読み取った記録 S_i と内部状態 Q_i により，テープの記録を S_j と書き換える．書き換えたくない場合は，入力の S_i と S_j とする．
3. 読み取った記録 S_i と内部状態 Q_i により，内部状態を Q_j に変える．
4. 読み取った記録 S_i と内部状態 Q_i により，ヘッドを右あるいは左にひとつ移動させる．

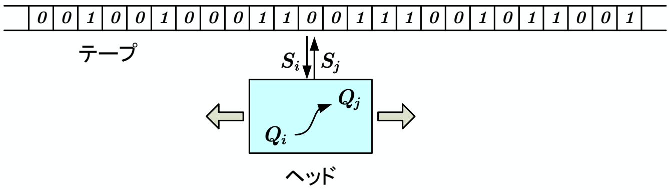


図 1: チューリング機械

[問 3] 10 点

大雑把に言って，以下のような対応がある．

チューリング機械		実際のコンピューター
無限に長い紙テープ	⇒	主記憶装置
テープの記録	⇒	主記憶装置に記憶されたビット列
ヘッド	⇒	中央演算装置 (CPU)
内部状態の記録	⇒	レジスター

3　コンピューターの仕組み

[問 1] *8 点*

(1) プロセス管理　(2) メモリー管理　(3) 入出力管理　(4) ファイル管理　(5) ユーザー管理

[問 2] *20 点*

数学的帰納法を使って証明する．

入力が一つの場合は，次に示す 4 通りの論理関数がある．これから，入力変数がひとつの場合，全ての論理関数が $NAND$ で書き表せることが分かる．

論理変数 x_1	論理関数の値	論理関数
$\{(0),(1)\}$	$\{(0),(0)\}$	$NAND\{NAND[x_1,\, NAND(x_1,\, x_1)],\, NAND[x_1,\, NAND(x_1,\, x_1)]\}$
$\{(0),(1)\}$	$\{(0),(1)\}$	x_1
$\{(0),(1)\}$	$\{(1),(0)\}$	$NAND(x_1,\, x_1)$
$\{(0),(1)\}$	$\{(1),(1)\}$	$NAND[x_1,\, NAND(x_1,\, x_1)]$

k 個の論理変数がある場合の論理関数 $o_i(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)$ は，次のように展開できる．

$$o_i = \begin{cases} p_i(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{k-1}) & x_k = 0 \text{ のとき} \\ q_i(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{k-1}) & x_k = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$= NAND\{NAND[p_i,\, NAND(x_k,\, x_k)],\, NAND[p_i,\, NAND(x_k,\, x_k)]\} + NAND[NAND(q_i,\, x_k),\, NAND(q_i,\, x_k)]$$

ここで，左辺第一項を α，第二項を β と置く．

$$= \alpha + \beta$$

$$= NAND[NAND(\alpha,\, \alpha),\, NAND(\beta,\, \beta)]$$

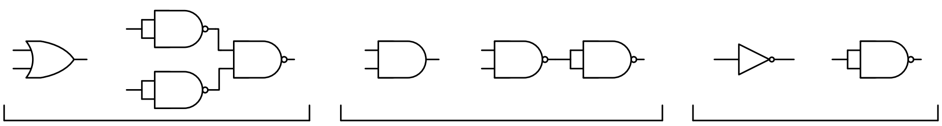
以上より，論理変数が $k-1$ 個の場合，$NAND$ が完備であれば，論理変数が k 個の場合にも完備であるといえる．

これらをまとめると，

- 論理変数が 1 つの場合，$NAND$ は完備である．
- 論理変数が $k-1$ 個の場合に $NAND$ が完備であれば，論理変数が k 個のとき完備である．

となる．したがって，任意の数の論理変数であっても $NAND$ は完備である．これで，$NAND$ が完備であることが証明できた．

この証明は，一見，難しいように思える．しかし，次の二つのこと，(1)$\{AND, OR, NOT\}$ の演算子が完備であることの証明，(2)AND，OR，NOT の演算子が，$NAND$ で書ける (下図) ことを知っていれば，簡単である．



それでも，$NAND$ の演算は慣れていないので，分かりにくい．$NAND$ を使った証明が嫌ならば，(1)$\{OR, AND, NOT\}$ の全てが $NAND$ で表現できることを示す，(2)$\{OR, AND, NOT\}$ が完備である—という順序 (逆でも OK) で証明しても良い．