情報の表現—記号・符号化 (その 1)

山本昌志*

2007 年 10 月 19 日

概 要

情報の表現の方法を学ぶ.

1 本日の学習内容

情報の表現の方法とデジタル化の基礎を学ぶ．教科書 [1] の pp.11–27 が本日の範囲である．そして，本日の授業のゴールは以下のように設定している.

- 情報の表現には様々な方法があることが分かる.
- アナログデータをデジタルデータに変換する方法が分かる.
- 標本化定理が理解できる.
- 信号を周波数に分解でき，データを圧縮できることが分かる.

2 情報の表現

2.1 表現のさまざまな側面

情報を表現するためには，自然言語と人工言語による表現がある．我々が使っている日本語は**自然言語**で，プログラミング言語は**人工言語**である.

- 自然言語と人工言語を列挙してみよう.

教科書の例に書いてあるように，道案内を行う場合，**手続き的表現**と**宣言的表現**がある.

2.2 情報の表現とモデル

情報を表現するためには，上手に複雑な現実を分かりやすくモデル化することが重要である．教科書では，

> 単純化/抽象化された事物/事象/概念のことを一般にモデル化と言う.

*独立行政法人　秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

と書いている．これはどういうことなのだろうか？ 教科書ではジェット機のモデル化の話がある．諸君は，伝送線路を集中定数モデル化する方法を知っているだろう．

見方を変えれば，すべの情報はモデル化されると言っても良いだろう．また，同じものを見ても，さまざまなモデル化ができる．数多くあるモデルのうち，どのようなモデルが良いのだろうか？ 一般的には，次のようなことを満たすモデルが良いとされている．

- 広範囲に適用できること．
- 単純であること．

モデル化したものを表現する代表的な方法が，表と図，グラフである．このあたりの話は教科書の通り．

3 記号と表現

3.1 ピクトグラム

図記号 (ピクトグラム:pictogram) は，絵文字とか呼ばれるもので，視覚的に分かりやすく瞬時にそれが表す情報が分かる．コンピューターのアイコンが代表的なものである．それ以外に，教科書に書いてあるような高速道路のサービスエリアがある．

3.2 数の表現

この辺の話は，3 年生の電子計算機で説明した内容とほとんど同じである．忘れたものは，そのときの講義ノート[1]を見よ．

時間があれば説明するが，教科書を読めば，直ちに理解できる内容である．

4 アナログとデジタル

4.1 アナログ表現とデジタル表現

自然界で観測される量は，ほとんど全てアナログデータと言っても良い．それは，時間的に連続的に変化する．例えば，皆さんが発生する声のデータをマイクロフォンを使って電圧に変化させて，観測すると図 1 のようになるかもしれない．

アナログデータをデジタルデータに変換する場合，ある等間隔[2]の時刻で信号を観測する．先ほどのマイクロフォンから出てくる電圧であれば，図 2 のように観測する．図中の●が観測データである．このようにデータを取り出す操作を標本化 (sampling) と呼ぶ．

時刻を等間隔で区切って観測するように，電圧も等間隔に区切る．電圧の区切る話は，次の「量子化」で述べる．

[1] http://akita-nct.jp/yamamoto/lecture/2005/3E/2nd/html/index.html
[2] 等間隔である必要は無い．しかし，等間隔の法が圧倒的に後での利用が簡単である．

標本化により取り出させたデータは，数値化されて保存できる．図 1 のようなアナログ量が連なった数値 (数列) として，表されたことになる．このように数値の列に情報を表現すると，コンピューターでは容易に取り扱うことができる．このようなデータをデジタルデータと呼ぶ．

もちろん，この数列から，元のアナログ信号を再構成できなくては，意味がない．再構成した様子を図 3 に示す．この図から，再構成された信号は元のデータと似ているが，多少，波形が異なることが分かる．すなわちデータが劣化したのである．データをデジタル化する場合，このデータの劣化は避けることができない．

- 元のアナログ信号と比較して，DA 変換して再構成した信号のどの部分の誤差が大きいか?
- そもそも誤差はどのように定義すれが良いだろうか?
- デジタルデータを再構成する場合，図 3 よりも誤差を小さくする方法を考えよ．

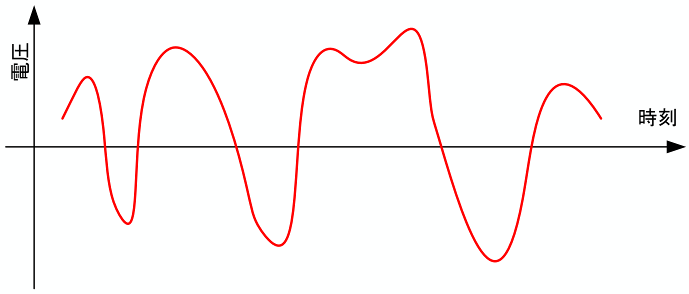

図 1: 観測したアナログデータ．全ての時刻で値があり，連続に変化している．

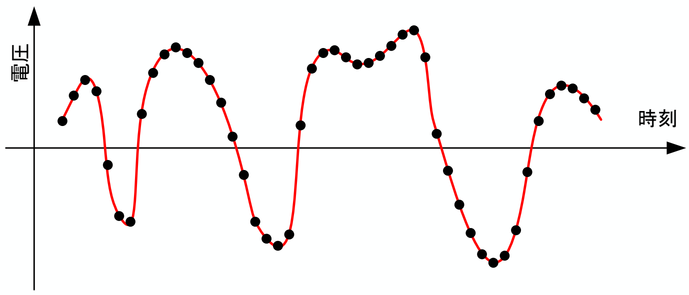

図 2: アナログ信号をサンプリングを行い，データをデジタル化している．等間隔の時刻で測定した電圧が記録される．また，電圧も特定の電圧間隔で測定している．この電圧を記録したものがデジタルデータである．

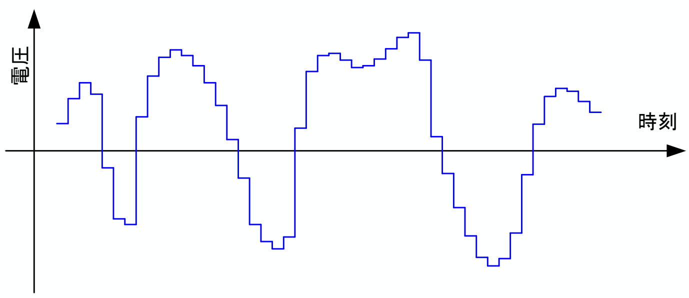

図 3: デジタルデータから元の信号を再構成する．

4.2 量子化

AD 変換器により，アナログデータをデジタルデータに変換することを量子化という．量子力学で学んだように，原子の内部にある束縛された電子は連続的なエネルギーを持つことができず，とびとびの値 (離散的な値) を持つ．このように離散的な値を持つものを総称して量子と呼ぶ．

音声信号を 10 ビットで量子化することを考える．音声信号は，-5[V]〜5[V] の範囲の電圧信号とする．10 ビットなので，$2^{10} = 1024$ 段階に分解できる．従って，分解能は，

$$\frac{10}{1024-1} \simeq 0.009775 \tag{1}$$

となる．したがって，0.009775[V] 以下の電圧の変化は AD 変換器では区別できない．

4.3 標本化定理

アナログ信号をデジタル化するとき，サンプリングを行い，電圧信号に変換する．この作業を標本化と言う．標本化を行うとき，サンプリング間隔に気をつけいないと，元の情報をきちんと再生できない．

サンプリング間隔が信号の周期よりも長くなると，元の信号の再生ができない．もちろん，これは直感的に理解できる．それでは，信号の周期とサンプリング間隔ではどのような関係があるのだろうか? これはシャノン (Claude Elwood Shannon,1916–2001) によって，示された．

> サンプリング周波数 f_s の半分の周波数以上の周波数はきちんと再生できない．

要するに，信号の周波数がサンプリング周波数の半分以上になるとダメと言うことである．従って，**サンプリング周波数は元の信の周波数の 2 倍以上にしなくてはならない**—ということである．サンプリング周波数の半分の周波数をナイキスト周波数という．

サンプリング周波数を f_S としたとき，入力信号の周波数（f_i）がナイキスト周波数より大きいと，その信号周波数が f_Sー f_i として標本化される．このような現象を，エイリアシング (aliasing)[3]と呼び，その様子を図 4 に示す．この例ではサンプリング周波数が 1[KHz] なのでナイキスト周波数は 0.5[kHz] になる．信号の周波数が 0.6[kHz] とナイキスト周波数よりも高いので，サンプリング周波数と信号の周波数の差，0.4[kHz] が標本化される．実際の信号と異なるので，非常にまずいことになる．

CD のサンプリング周波数 $f_S = 44.1$[KHz] の場合，ナイキスト周波数は 22.05[kHz] である．音声信号にこのナイキスト周波数以上の信号が混じると，へんな音が再生されることになる．そのため，信号を AD 変換するときには，ローパスフィルターをつけて，ナイキスト周波数以上の信号が混じらないようにしている．

エイリアシングには，いろいろな場面で遭遇する．蛍光灯の下で扇風機を動かし始めるときと止めるときにエイリアシングが起きる．羽がゆっくり回って見えたり，止まったり，逆回転が見えたりする．また，テレビの中で車のタイヤの回転が同じように見えることがある．これはすべてエイリアシングが起きている．

- 蛍光灯の元でのサンプリング周波数は，いくらか?
- TV を通して観察するときのサンプリング周波数は，いくらか?

[3]専門用語なので辞書に載っていない．alias:別名．

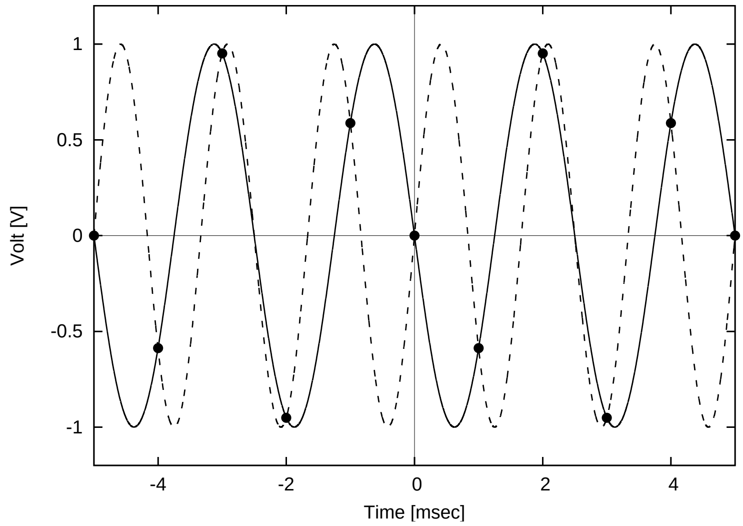

図 4: エイリアシングの例．点線が実際の信号 (0.6[kHz]) で，それを 1[KHz] でサンプリングした．●がサンプリングの結果である．サンプリングの結果は，実線で表した 0.4[kHz] の信号と一致する．

なぜこのようなことが生じるか? 考えてみよう．いろいろな説明方法を考えたが，どれも結構難しい．4 年生のときに学習した複素フーリエ級数[4]を使うとどうだろうか．

サンプリングは，図 5 の点線の矩形波を信号に乗算していると考える．この矩形波の幅がゼロ近づく極限[5]がサンプリングとなる．いくら幅が狭くても，この矩形波 $g(t)$ は，繰り返し波形なのでフーリエ級数[6]で表すことができるであろう．

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_s t} \tag{2}$$

ここで，ω_s がサンプリングの角振動数である．標本化する信号を $f_i(t)$ とすると，標本化された信号は

$$V(t) = f_i(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_s t} \tag{3}$$

となる．簡単に考えるために，標本化される信号が三角関数 $Ae^{i\omega_i t}$ であった場合を考える．この場合，

$$V(t) = Ae^{i\omega_i t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_s t} \tag{4}$$

と標本化される．ここで，サンプリング周波数と信号の周波数の関係を次のように書き改める．

$$\omega_i = \omega_s - \omega_1 \tag{5}$$

[4]ディラックの δ 関数を使うと，もっとエレガントな説明ができるかも???
[5]実際の測定では矩形はは有限の幅を持つ．ゼロの極限では観測できない．数学ではゼロの極限で取り扱う．
[6]複素フーリエ級数を使っているが，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ を考えれば簡単．

この関係を使うと，式 4 は

$$
\begin{aligned}
V(t) &= Ae^{i\omega_i t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_s t} \\
&= Ae^{i(\omega_s-\omega_1)t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_s t} \\
&= Ae^{-i\omega_1 t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i(n+1)\omega_s t} \\
&= Ae^{-i\omega_1 t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_s t} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

と書き換えることができる．この結果は，サンプリング角周波数 ω_s の場合，角周波数 ω_i の信号と，角周波数 $\omega_1=\omega_s-\omega_i$ の信号の見分けがつかないと言っている．すなわち，サンプリング周波数が 1[kHz] の場合，0.6[kHz] の信号は 0.4[kHz] の信号と同じと言うことである．

以上の結果から，サンプリング周波数が 1[kHz] の場合，その半分の周波数 (0.5[kHz]) まで再生がきちんと再生できることになる．むろん，再生した信号には 0.5[kHz] 以上を含んではならない．

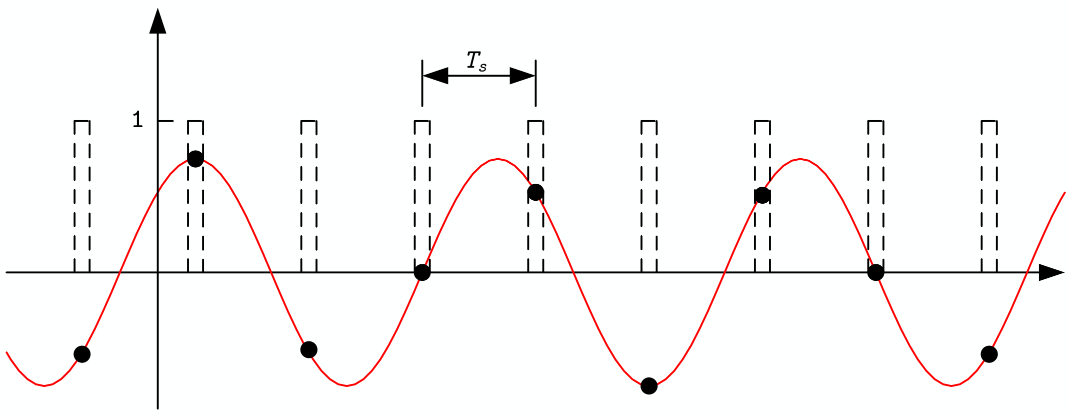

図 5: 実線が実際の信号で．●がサンプリングの結果である．点線の矩形がサンプリングを取り出す関数である．

4.4 周期周波数への分解

教科書のこのあたりの話は，計算機によるフーリエ変換と関係している．

諸君が昨年の応用解析で学習したフーリエ変換は数学だったので，関数 $f(x)$ は連続的な値であった．しかし，実際の測定量，例えば電圧など連続的に測定してそのデータが蓄えられるわけではない．連続ではなく離散的なデータとなる．これをフーリエ変換する方法を示す．

ここでも話を簡単にするために，周期を 2π とする．その，周期の中で N 個の等間隔でデータが得られたとしよう．いわゆる，サンプリングである．データが等間隔に並ぶということは FFT で重要となる．ここでは FFT まで，話をしない．

サンプリングで得られたデータを

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \tag{7}$$

とする．この場合，サンプリング周波数は $N/(2\pi)$，角振動数は N となる．ここで得られデータを

$$f_j = f(x_j) \tag{8}$$

とおく．

準備ができたので，実際のフーリエ級数の式

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \tag{9}$$

を評価することになる．しかし，ここでは測定量である f_j と x_j はそれぞれ N 個である．従って，フーリエ係数の c_n も N 個しか決めることができない．そうすると展開の基底も N 個までである．その基底として

$$\left\{1, e^{ix}, e^{2ix}, e^{3ix}, \cdots, e^{(N-1)ix}\right\} \tag{10}$$

をとる．周波数領域で考えると，0 から始まり $T/(N-1)$ まで等間隔の周波数で展開するのである．したがってフーリエ級数の展開式は，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx} \tag{11}$$

となる．ここで残された問題は，測定量の x_j と f_j から c_k を決めることである．これは比較的簡単で，

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx_j} \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \tag{12}$$

の連立方程式を解けばよい．この式の形が分かりにくい—と言う人もいるだろう．もう少し分かり易く書くと次のようになる．

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & e^{ix_1} & e^{2ix_1} & \ldots & e^{(N-1)ix_1} \\ 1 & e^{ix_2} & e^{2ix_2} & \ldots & e^{(N-1)ix_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{ix_{N-1}} & e^{2ix_{N-1}} & \ldots & e^{(N-1)ix_{N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

x_j は測定量なので，この $N \times N$ は計算可能である．この連立方程式から，未知数であるフーリエ係数 c_k を決めることになる．実際の場では，連立方程式を計算すると時間がかかるので，もっと上手に計算する．高速フーリエ変換 (FFT:Fast Fourier Transform) を使う．この辺の話はおもしろく，結構勉強になるので，興味のあるものは調べてみると良い．

ここで，サンプリングで得られた N 個のデータから，N 個の周波数に分解できることが理解できた．得られた N 個の周波数の振幅は大きいものもあれば，小さいものもある．小さいものは，信号の再生に寄与が少なく，それを加算しなくても，大体もとの信号と同じ形になる．従って，寄与の少ない信号を無視することにより，サンプリングのデータ数よりも小さいデータ数で再生ができる．これは，データの圧縮に他ならない．

5　課題

5.1　課題内容

以下の課題を実施し，レポートとして提出すること．

[**問 1**]　(復予) 教科書 [1]pp.11–33 を 2 回読め．レポートには「2 回読んだ」と書け．

[**問 2**]　(復) 教科書 [1] 章末問題 (p.35) の [2.1]

[**問 3**]　(復) 教科書 [1] 章末問題 (p.35) の [2.2]

[**問 4**]　(復) 教科書 [1] 章末問題 (p.35) の [2.3]

5.2　レポート提出要領

期限	10 月 26 日 (金) AM 8:45
用紙	A4 のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙を 1 枚つけて，以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「情報理論」 課題名「課題　情報の表現—記号・符号化 (その 1)」 提出日 5E　学籍番号　氏名
内容	2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．

参考文献

[1] 河合慧編. 情報. 東京大学出版会, 2006.