学年末試験解答用紙 (5E 計算機応用)

電気工学科　　学籍番号　　　　　氏名

2008 年 2 月 7 日

1　積分

[問 1] 20 点

定積分，$S=\int_a^b f(x)dx$ の近似値を数値計算で求めることを考える．積分の値は，x 軸と関数を表す曲線で囲まれた面積と等しい．したがって，図 1 のように台形の面積の和を求めることにより，積分の近似値が分かる．積分の範囲 $[a,b]$ を N 等分した台形で近似した面積 T は，

$$
\begin{aligned}
T &= h\frac{f(a)+f(a+h)}{2}+h\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}+h\frac{f(a+2h)+f(a+3h)}{2}+\cdots \\
&\qquad +h\frac{f(a+(N-1)h)+f(a+Nh)}{2} \\
&= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left[f(a+jh)+f(a+(j+1)h)\right]
\end{aligned}
$$

となる．これが数値積分の台形公式である．

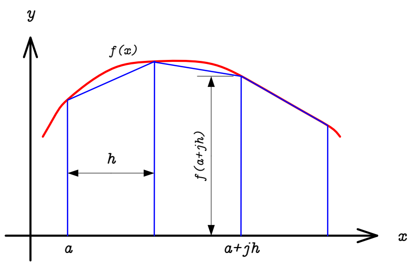

図 1: 積分を台形の面積で近似

[問 2] 20 点

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define N 1000          // 分割数
double f(double x);     // プロトタイプ宣言

//======= メイン関数 ==================
int main(void)
{
  double a, b, h;
  double t=0;
  int j;

  a=0;                  // 積分の左端
  b=2*M_PI;             // 積分の右端

  h=(b-a)/N;
  for(j=0; j<N; j++){
    t += f(a+j*h)+f(a+(j+1)*h);
  }
  t *= h/2;

  printf("Integral = %e\n", t);

  return 0;
}

//======= 関数 ========================
double f(double x)
{
  double y;

  y=x*x*sin(x)*sin(x);

  return y;
}
```

2 偏微分方程式

[問 1] 25 点

二次元のラプラス方程式は,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

である.

$\phi(x+\Delta x,y)$ と $\phi(x-\Delta x,y)$ をそれぞれ (x,y) の周りでテイラー展開すると,

$$\begin{aligned}\phi(x+\Delta x,y)=\phi(x,y)&+\frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Delta x^2\\&+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\Delta x^3+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\Delta x^4+\cdots\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\phi(x-\Delta x,y)=\phi(x,y)&-\frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Delta x^2\\&-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\Delta x^3+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\Delta x^4+\cdots.\end{aligned} \tag{3}$$

これらの右辺同士,左辺同士を加えると,

$$\phi(x+\Delta x,y)+\phi(x-\Delta x,y)\simeq 2\phi(x,y)+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Delta x^2 \tag{4}$$

が得られる.Δy^4 は,高次の微少量なので無視している.同じことを y について,行うと,

$$\phi(x,y+\Delta y)+\phi(x,y-\Delta y)\simeq 2\phi(x,y)+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Delta y^2 \tag{5}$$

式 (4) と式 (5) を元のラプラス方程式 (1) に代入する.すると,差分化されたラプラス方程式

$$\begin{aligned}&\frac{\phi(x+\Delta x,y)+\phi(x-\Delta x,y)-2\phi(x,y)}{\Delta x^2}\\&\qquad+\frac{\phi(x,y+\Delta y)+\phi(x,y-\Delta y)-2\phi(x,y)}{\Delta y^2}=0\end{aligned} \tag{6}$$

が得られる.

[問 2] 25 点

速度が 1 の一次元の波動方程式は,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

である.前問と同様に,テイラー展開を行うと,時間および場所に関して,

$$u(x+\Delta x,y)+u(x-\Delta x,y)\simeq 2u(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 \tag{2}$$

$$u(x,t+\Delta t)+u(x,t-\Delta t)\simeq 2u(x,t)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta t^2 \tag{3}$$

が得られる.これらを元の波動方程式 (1) に代入すると,差分化された波動方程式

$$\begin{aligned}&\frac{u(x+\Delta x,t)+u(x-\Delta x,t)-2u(x,t)}{\Delta x^2}\\&\qquad+\frac{u(x,t+\Delta t)+u(x,t-\Delta t)-2u(x,t)}{\Delta t^2}=0\end{aligned} \tag{4}$$

が得られる.

[問 3] 10 点

拡散方程式では場所 x に関しては二階微分なので,前問や前々問と同じように取り扱える.すなわち,

$$u(x+\Delta x,y)+u(x-\Delta x,y)\simeq 2u(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 \tag{1}$$

である.時間に関して,[問 1] の x 同様にテイラー展開を行うと,

$$\begin{aligned}u(x,t+\Delta t)=u(x,t)&+\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta t^2\\&+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Delta t^3+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\Delta t^4+\cdots\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}u(x,t-\Delta t)=u(t,t)&-\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta t^2\\&-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Delta t^3+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\Delta t^4+\cdots.\end{aligned} \tag{3}$$

これらの右辺同士,左辺同士を引き算を行うと,

$$u(x,t+\Delta t)-u(x,t-\Delta t)\simeq 2\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \tag{4}$$

が得られる.式 (1) と式 (4) を元の拡散方程式に代入すると,差分化された拡散方程式

$$\begin{aligned}&\frac{u(x+\Delta x,t)+u(x-\Delta x,t)-2u(x,t)}{\Delta x^2}\\&\qquad-\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t-\Delta t)}{2\Delta t}=0\end{aligned} \tag{5}$$

が得られる.