

# 非線形方程式の数値計算法

山本昌志\*

2006年7月18日

## 概要

非線形方程式の近似解を数値計算で求める方法を学習する。この種の問題を解く代表的な方法である二分法とニュートン法について、原理とプログラム作成方法について説明する。また、付録ではニュートン法を使つての複素数の解や非線形の連立方程式の計算方法も説明している。ただし、これは上級者向け。

## 1 本日の学習内容

本日と来週の授業で、非線形方程式の近似解をコンピュータで計算する方法について学習する。具体的には、二分法とニュートン法と呼ばれる方法の原理を学び、自らプログラムを作成する。これらを通して、コンピュータを使って、非線形方程式を解く技術を取得することを目指す。ここでの学習で設定しているゴールは次のとおりである。

- 二分法とニュートン法の計算方法のイメージがつかめる。グラフを使って、それぞれの方法の考え方が説明できる。また、ニュートン法の漸化式を導くことができる。
- アルゴリズムが理解でき、計算方法のフローチャートが書ける。
- それぞれ計算方法に優劣があり、問題により使い分けを行う必要があることが理解できる。
- C言語でプログラムの作成ができる。

講義ではその計算方法のイメージ—幾何学的な図—をつかむことに努めよ。イメージがつかめると、その計算は簡単に出来るであろう。

## 2 非線形方程式の概要

### 2.1 非線形方程式と近似解の求めかた

ここでは、数値計算により非線形方程式の解を求める方法を学習する。ところで、非線形方程式とはなんだろうか?—少し考えてみることにする。諸君が最初に学んだ非線形方程式は、

$$3x^2 + 2x + 5 = 0 \quad (1)$$

---

\*国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

のような 2 次方程式であろう。一方，線形の方程式は

$$7x + 4 = 0 \quad (2)$$

のようなものを言う。変数が 1 次のもを線形方程式，1 次以外のものを非線形方程式と言う。次のようなものが

$$x + \sqrt{x} + 5 = 0 \quad 2 \sin x - x = 0 \quad e^x + x = 0 \quad \frac{x}{x + 5 + \log x} = \cos x \quad (3)$$

も非線形方程式である。線形の方程式は，説明するまでもなく，誰でも簡単に解ける。それに対して，非線形方程式は解けない—解析解がない—のが普通である。ここで示した非線形方程式の例を見よ，諸君はこの方程式が解けるだろうか？しかし，解析解のない非線形方程式の近似解を求めなくてはならないことがしばしば生じる。技術者が装置の設計を行う場合，そのようなことは頻繁に起こる。通常の設計では，解析解が不要な代わりに，非常に良い精度—しばしば 0.1% よりもずっと良い—で値（近似解）が必要となる。このような時に，これから学習する非線形方程式の解法が役に立つ。

## 2.2 非線形方程式の例

具体的な問題—p12 の最初の練習問題—について，非線形方程式を考えることにしよう。たとえば，3 次方程式

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0 \quad (4)$$

の根を求める。この解析解を求めるのは，ほとんど不可能であろう<sup>1</sup>。こらえ性のない私なんかは，すぐにコンピューターで計算を始める。本日は，コンピューターでこの非線形方程式の根，実際は近似解を求める方法を学習するのである。ちなみにこの方程式の根は，

$$x_1 = 1 - 2 \left[ \frac{2}{1 + \sqrt{33}} \right]^{1/3} + \left[ \frac{1}{2} (1 + \sqrt{33}) \right]^{1/3} \quad (5)$$

$$x_2 = 1 + (1 + \sqrt{3}i) \left[ \frac{2}{1 + \sqrt{33}} \right]^{1/3} - \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}i) \left[ \frac{1}{2} (1 + \sqrt{33}) \right]^{1/3} \quad (6)$$

$$x_2 = 1 + (1 - \sqrt{3}i) \left[ \frac{2}{1 + \sqrt{33}} \right]^{1/3} - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}i) \left[ \frac{1}{2} (1 + \sqrt{33}) \right]^{1/3} \quad (7)$$

と分かっている<sup>2</sup>。それにしても，これらの根は良く似ている。不思議なものである。複素平面で考えると，これらが似ているのも分かるような気がする。

ここでは数値計算法により，実数解，すなわち  $x_1$  を求める。むろん，複素数解を求めることも可能であるが，少し難しくなる<sup>3</sup>。実際に，プログラムを作成する前に，実数解の近似値をしめしておくのが良いだろう。それは，

$$x_1 \simeq 1.1659055841222127171 \dots \quad (8)$$

<sup>1</sup>3 次方程式なので，解の公式を使うこともできる。しかし，私は嫌だ—

<sup>2</sup>私は，数式処理システム Mathematica を利用して解いた。

<sup>3</sup>複素数解については，付録 A.1 節に示す。

となる．ここでの学習の最初の段階で，この近似解を求めるのである．

一般に，非線形の方程式は次の形に書き表すことができる．

$$f(x) = 0 \tag{9}$$

この方程式の解  $x$  をコンピューターで求めることが，ここでの学習のテーマである．もし，方程式の右辺がゼロでない場合は，左辺へ移項して式 (9) の形にできる．線形の場合も含めた方程式の一般形は，式 (9) で表現しても良いだろう．非線形方程式 (9) を解くことは，関数  $f(x)$  の値がゼロになる  $x$  の値を捜す—と言い換えることができる．実際コンピューターを使った数値計算では， $f(x)$  の値がゼロとなる  $x$  を捜すことになる．

次節からは，非線形方程式の近似解を求める 2通りの計算テクニック (二分法, ニュートン法) を示す．いずれの方法も， $y = f(x)$  の  $x$  軸と交わる点，即ち  $f(x) = 0$  を反復 (ループ) 計算を用いて探している．式 (4) であれば， $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$  として， $x$  軸との交点を計算するのである．この関数  $f(x)$  を図 9 にしめす． $x$  軸の交点がこの方程式の解となっているのは，中学生の時に学習したとおりである．

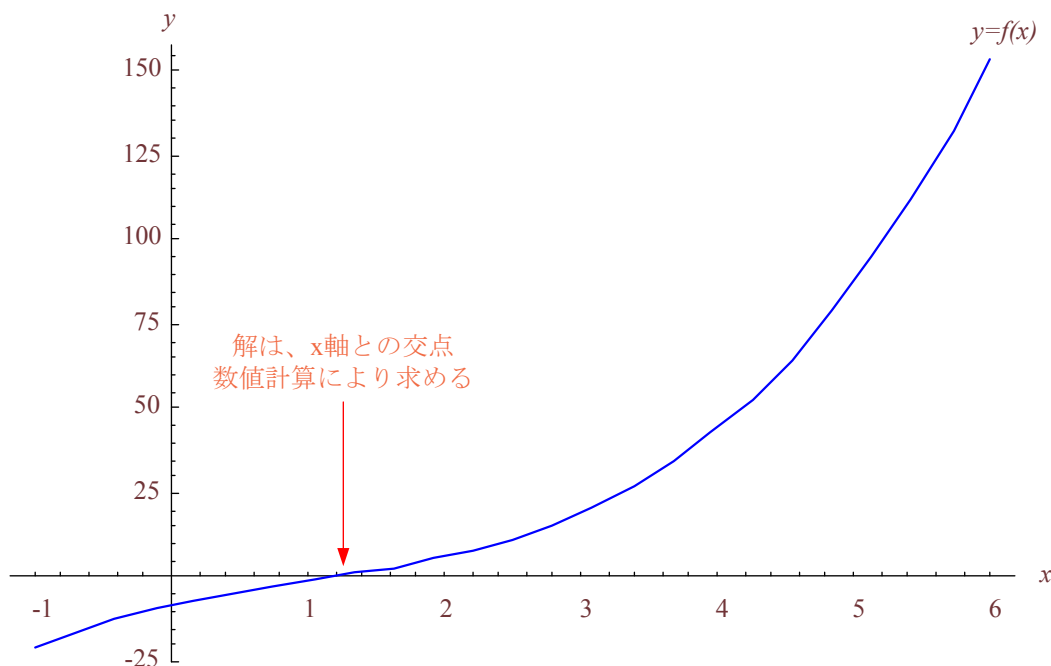


図 1:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$  の関数． $x$  軸との交点が解である．

式 (4) は 3 次方程式であるが，ここで用いる数値計算のテクニックで解ける問題はべき乗の多項式とは限らない．関数の値がゼロとなる点を捜しているだけだからである．計算に用いれる領域が連続であれば，どんな方程式でも解ける．三角関数や指数関数，分数の形でも関係なく解ける．

### 3 二分法 (bisection method)

#### 3.1 計算方法

二分法の原理は非常に単純であるが、場合によっては非常に強力な方法である。これは、閉区間  $[a, b]$  で連続な関数  $f(x)$  の値が、

$$f(a)f(b) \leq 0 \quad (10)$$

ならば、 $f(\alpha) = 0$  となる  $\alpha$  が区間  $[a, b]$  にある——ということを使う。このことは、中間値の定理から保証されるが、常識的に考えてあたりまえである。ただ、連続な区間で適用できることを忘れてはならない。

実際の数値計算は、 $f(a)f(b) \leq 0$  であるような 2 点  $a, b (a \leq b)$  から出発する。そして、区間  $[a, b]$  を 2 分する点  $c = (a + b)/2$  に対して、 $f(c)$  を計算を行う。 $f(c)f(a) \leq 0$  ならば  $b$  を  $c$  と置き換え、 $f(c)f(a) \geq 0$  ならば  $a$  を  $c$  と置き換える。絶えず、区間  $[a, b]$  の間に解があるようにするのである。この操作を繰り返して、区間の幅  $|b - a|$  が与えられた値  $\varepsilon$  よりも小さくなったならば、計算を終了する。

解へ収束は収束率  $1/2$  の一次収束となる。1 回の計算で、解の精度は  $1/2$  になるからである。10 回計算を行えば、はじめに比べて解の精度は  $(1/2)^{10} = 1/1024$  となる。非常に良い精度の近似解を得るためには、かなりの計算が必要である。人間と電卓では手間がかかって大変である。このような単純反復作業はコンピューターの得意分野である。

実際にこの方法で式 (4) を計算した結果を図 2 に示す。この図より、 $f(a)$  と  $f(b)$  の関係の式 (10) を満たす区間  $[a, b]$  が  $1/2$  ずつ縮小していく様子が見える。

計算の終了は、

$$b - a \leq \varepsilon \quad (11)$$

の条件を満たした場合とするのが一般的である。ここで、 $\varepsilon$  は近似解の精度である。これを変えることにより、任意の精度で近似解を求めることができる。アルゴリズムから、 $b - a$  が大体の計算精度を表すことは自明である。

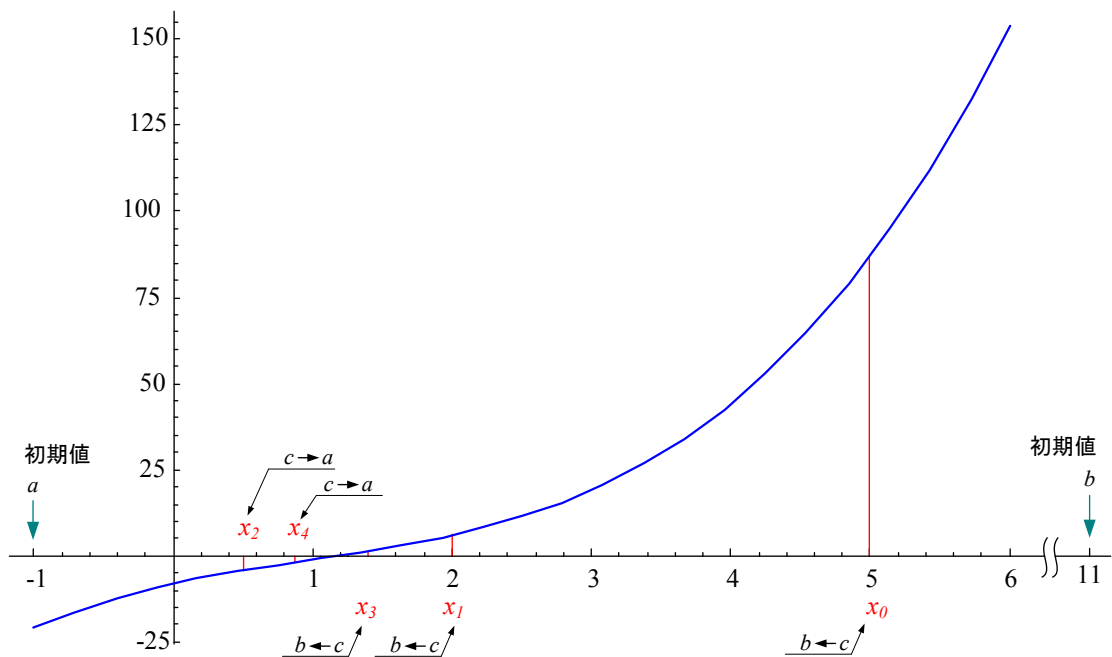


図 2:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$  の実数解を二分法で解散し, その解の収束の様子を示している. 初期値は  $a = -1, b = 11$  として, 最初の解  $c = x_0 = 5$  が求まり, 順次より精度の良い  $x_1, x_2, x_3, \dots$  が求まる. それが, 解析解  $x = 1.1659 \dots$  (x 軸との交点) に収束していく様子が分かる.

### 3.2 フローチャート

関数  $f(x)$  はあらかじめ, プログラム中に書くものとする. C 言語の関数—サブルーチン—を利用するのが良いだろう. 具体的には,

```
double f(double x){
    double y;

    y=x*x*x-3*x*x+9*x-8;

    return y;
}
```

と書く. もちろんこれを使うためには, プロトタイプ宣言が必要である. また, 計算を打ち切る条件もプログラム中に書くものとする. 通常, これは

```
#define EPS 1.0e-10
```

とプログラムの先頭を書く. この EPS が求めるべき解の精度を表す. マクロ定数なので, 普通, 大文字—C 言語の習慣—を使う.

図3のような二分法のフローチャートの通りにすれば，目的の動作をするプログラムができる．

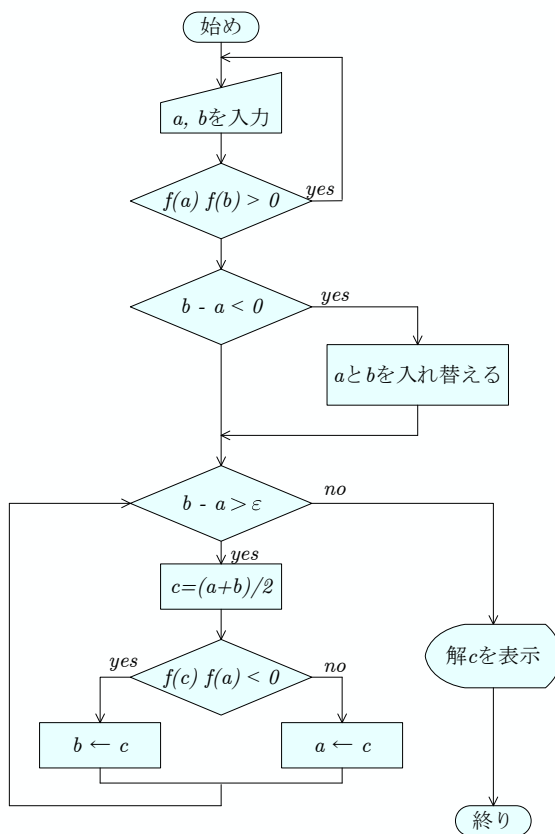


図3: 二分法のフローチャート

## 4 ニュートン法 (Newton's method)

### 4.1 計算方法

#### 4.1.1 漸化式

関数  $f(x)$  のゼロ点  $\alpha$  に近い近似値  $x_0$  から出発する．そして，関数  $f(x)$  上の点  $(x_0, f(x_0))$  での接線が， $x$  軸と交わる点を次の近似解  $x_1$  とする．そして，次の接線が  $x$  軸と交わる点を次の近似解  $x_2$  とする．同じことを繰り返して  $x_3, x_4, \dots$  を求める (図4)．この計算結果の数列  $(x_0, x_2, x_3, x_4, \dots)$  は初期値  $x_0$  が適当であれば，真の解  $\alpha$  に収束することは図より明らかであろう．

実際にこの数列を計算するためには，漸化式が必要である．図のようにすると，関数  $f(x)$  上の点  $(x_i, f(x_i))$  の接線を引き，それと  $x$  軸と交点が  $x_{i+1}$  になる．まずは， $x_{i+1}$  を求めることにする．点  $(x_i, f(x_i))$  を通

り、傾きが  $f'(x_i)$  の直線の方程式は、

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i) \quad (12)$$

である。図 4 より、 $y = 0$  の時の  $x$  の値が  $x_{i+1}$  になることが分かる。したがって、 $x_{i+1}$  は、

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (13)$$

となる。これで、 $x_i$  から  $x_{i+1}$  が計算できる。これをニュートン法の漸化式と言う。この漸化式を用いれば、次々とより精度の良い近似解を求めることができる。

計算の終了は、

$$\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \right| \leq \varepsilon \quad (14)$$

の条件を満たした場合とするのが一般的である<sup>4</sup>。 $\varepsilon$  は計算精度を決める定数で、非常に小さな値である。これ以外にも計算の終了を決めることは可能なので、状況に応じて、計算の打ち切り方法を決めればよい。実際に式 (4) を計算した結果を図 4 に示す。接線との交点が解に近づく様子がわかるであろう。

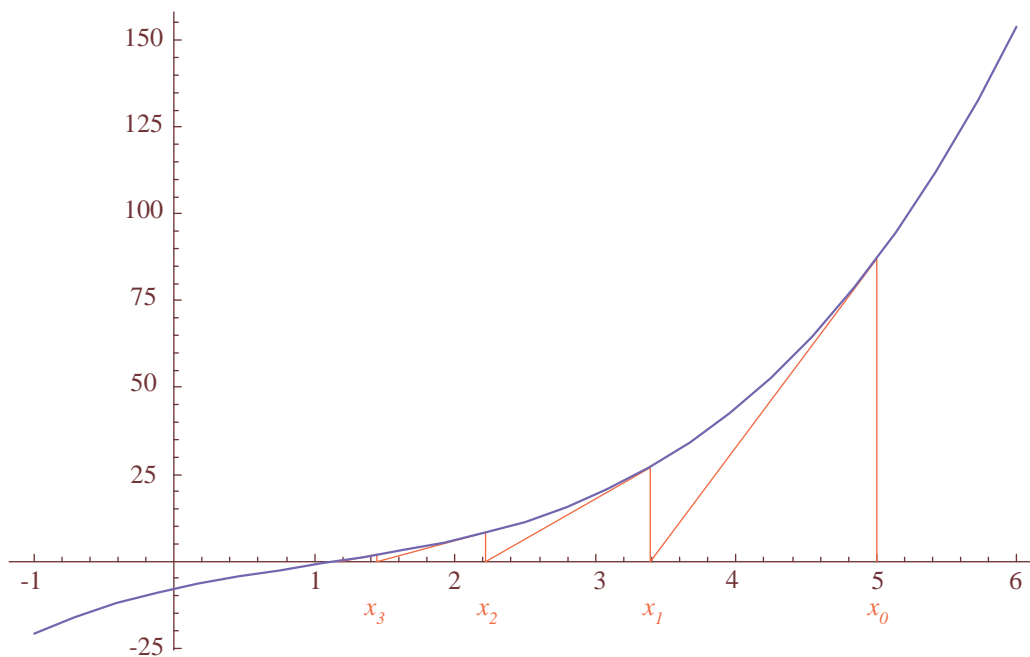


図 4:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 8$  の実数解をニュートン法で計算し、解の収束の様子を示している。初期値  $x_0 = 5$  から始まり、接線と  $x$  軸の交点からより精度の高い回を求めている。

ニュートン法は複素数にも適用できる。また、連立方程式にも容易に拡張できる。諸君が学習してきた数は、自然数 → 整数 → 有理数 → 無理数 → 複素数 → ベクトル → 行列 → … と拡張されてきた。しかし、

<sup>4</sup> $|f(x_{i+1})| \leq \varepsilon$  とすることもある。

どのような数であれ，演算規則は非常に似通っていることは今まで経験してきたとおりである．このことから，実数で成り立つ方法は，複素数や行列にも成り立つことが予想できる．このように考えると，ニュートン法が連立方程式や複素数に拡張できることも不思議ではない．

これは少し高度な内容なので，付録 A 節におまけで載せておく．たぶん，諸君の中の何人かは一瞬にして実数の近似解を求めるニュートン法を理解したと思う．これまでの話が理解できた者は，付録 A 節を勉強することを勧める．

#### 4.1.2 解への収束速度

ニュートン法を使う上で必要な式は，式 (13) のみである．計算に必要な式は分かったが，数列がどのように真の解  $\alpha$  に収束するか考える． $x_{i+1}$  と真値  $\alpha$  の差の絶対値，ようするに誤差を計算する． $f(\alpha) = 0$  を忘れないで，右辺  $f(x_i)/f'(x_i)$  を  $\alpha$  の周りでテイラー展開する．すると，

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{i+1}| &= \left| \alpha - x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right| \\ &= \left| \alpha - x_i + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \left[ 1 - \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'^2(\alpha)} \right] (x_i - \alpha) + O((\alpha - x_i)^2) \right| \\ &= |O((\alpha - x_i)^2)| \end{aligned} \quad (15)$$

となる． $i + 1$  番目の近似値は， $i$  番目に比べて 2 乗で精度が良くなるのである．これを，二次収束と言い，非常に早く解に収束する．例えば， $10^{-3}$  の精度で近似解が得られているとすると，もう一回式 (13) を計算するだけで， $10^{-6}$  程度の精度で近似解が得られるということである．一次収束の二分法よりも，収束が早いことが分かる．

#### 4.1.3 解けない方程式

アルゴリズムから，二分法は解に必ず収束する<sup>5</sup>．ただし，収束のスピードが遅いのが欠点である．一方，ニュートン法と解に収束するとは限らない．初期値が悪いと解に収束しない場合がある．厳密にその条件を求めるのは大変なので，実例を示すことにする．

非線形方程式

$$3 \tan^{-1}(x - 1) + \frac{x}{4} = 0 \quad (16)$$

を計算することを考える．これは，初期値が悪いと収束しない方程式の例である．例えば初期値  $x_0 = 3$  の場合，図 5 のように収束しない<sup>6</sup>．これを初期値  $x_0 = 2.5$  にすると図 6 のように収束する．

このようにニュートン法は解に収束しないで，振動する場合がある．こうなると，プログラムは無限ループに入り，永遠に計算し続ける．これは資源の無駄遣いなので，慎むべきである．通常は，反復回数の上限を決めて，それを防ぐ．ニュートン法を使う場合は，この反復回数の上限は必須である．

ニュートン法で収束する必要条件が分かればこの問題は解決する．しかし，それを探するのは大変である．というか私には分からない．一方，十分条件は簡単にわかる．閉区間  $[a, b]$  で， $f(a) < 0$ ， $f(b) > 0$  のような関数を考える．このとき，

<sup>5</sup>収束すると私は信じています．厳密な証明は数学者に任せましょう．

<sup>6</sup>発散だと思う．もしかしたら振動かも．私は興味がありませんので，発散か振動か誰か証明してください．



- 常に  $f'(x) > 0, f''(x) > 0$  で , 初期値が  $x_0 = b$  の場合
- 常に  $f'(x) > 0, f''(x) < 0$  で , 初期値が  $x_0 = b$  の場合

は , 必ず収束する . ニュートン法の図から明らかである .  $f(a) > 0, f(b) < 0$  の場合は ,  $f(x)$  に-1 倍すれば , 先の十分条件を考えることができる .

実際には収束しない場合のほうが稀であるので , ニュートン法は非常に強力な非線形方程式の解法である . ただ , 反復回数を忘れないことが重要である . また , 二分法と組み合わせて使うことも考えられる .

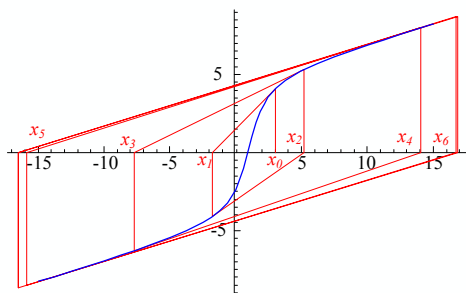


図 5: ニュートン法で解が求まらない場合

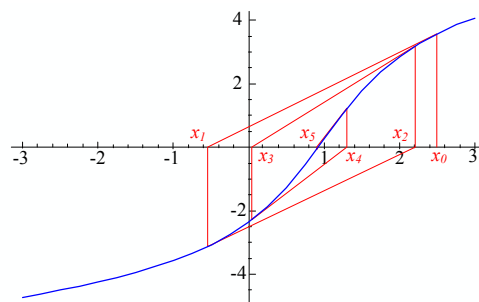


図 6: ニュートン法で解が求まる場合

## 4.2 フローチャート

二分法同様 , 関数と計算を打ち切る条件はプログラム中に書くものとする . そうすると , 図 7 のようなニュートン法のフローチャートが考えられる .

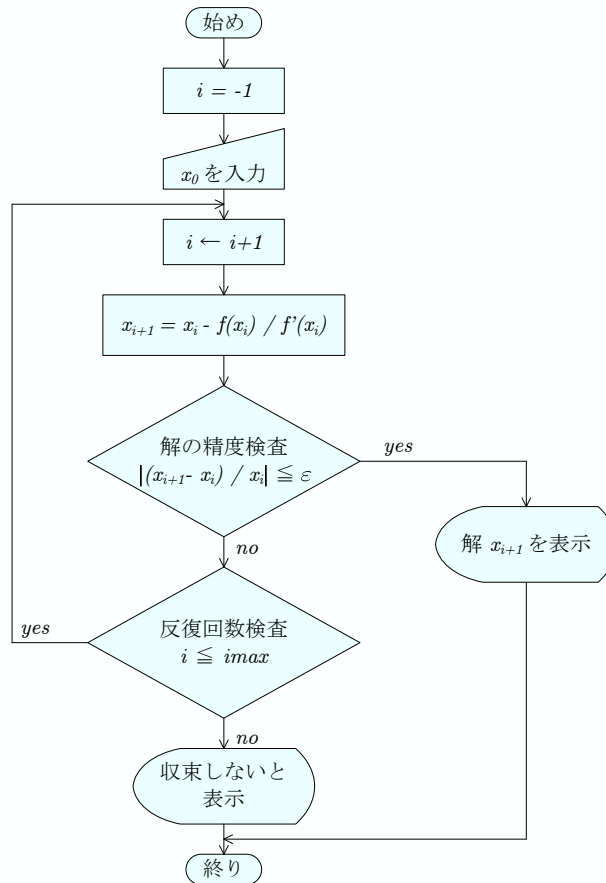


図 7: ニュートン法のフローチャート

## 5 二分法とニュートンの比較

### 5.1 解への収束速度

図 8 に、これまでに示した 2 つの方法の解への近づき具合を示す。二分法に比べてニュートン法の収束が圧倒的に早いことがわかる。先に示した通り、ニュートン法は二次収束、二分法は一次収束であることがグラフより分かる。二分法は、10 回の計算で、 $2^{-10} = 1/1024$  程度になっていることに気づいてほしい。ニュートン法では、計算回数に応じて  $10^{-1} \rightarrow 10^{-2} \rightarrow 10^{-4} \rightarrow 10^{-8}$  のように急激に近似解の精度が向上することがグラフからも分かるであろう。

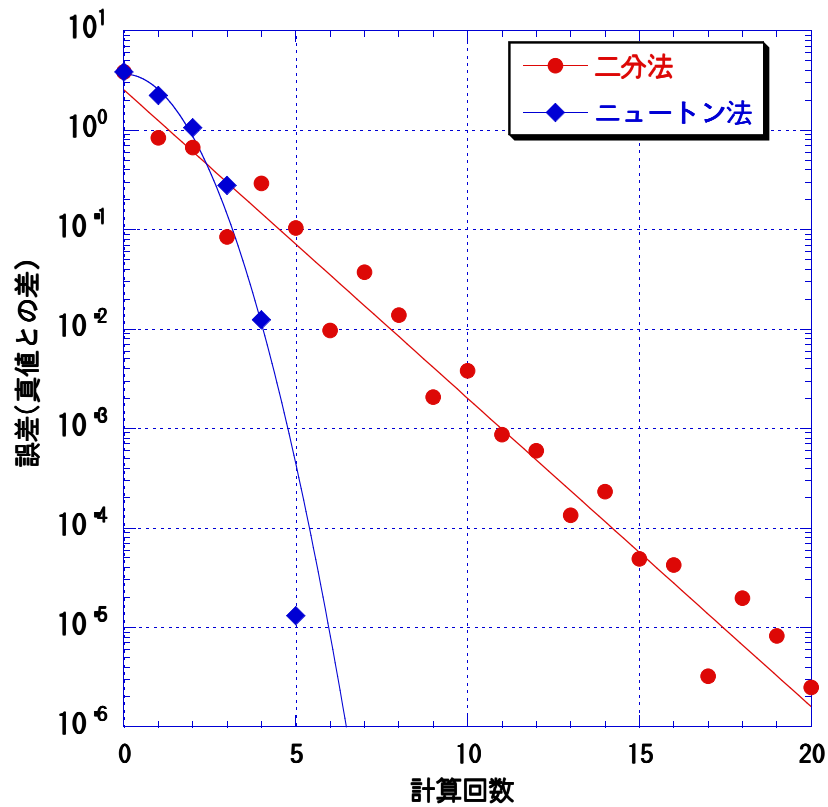


図 8: 計算回数 (反復回数) と誤差の関係

## 5.2 それぞれの特徴

二分法とニュートン法, 非線形方程式の近似解の計算で, どちらが適しているかは問題に依存する. 計算が発散することがないと分かったおり, 計算のスピードが要求される場合にはニュートン法が適している. 一方, 方程式が複雑で解がよく分からない場合には二分法が適することも多い.

それぞれの長所/短所を理解して, 自分の計算に適する解を探すことが重要である. また, 場合によっては, 二分法とニュートン法を組み合わせることを考えても良い.

二分法とニュートン法の長所と短所をまとめると, 表??のようになる.

表 1: 二分法とニュートン法の長所と短所

| 長所  | 短所   |
|---|--|
| <p>ニュートン法</p> <p>初期値が適当ならば，収束が非常に早い (図 8) .</p>   | <p>初期値が悪いと，収束しないことがある . (図 5) . 収束しない場合があるので，反復回数の上限を決めておく必要がある .</p> <p>解を探索する範囲の指定が難しい .</p> |
| <p>二分法</p> <p>閉区間 <math>[a, b]</math> に解があれば，必ず解に収束する . 間違いなく解を探すので，ロバスト (robust : 強靱な) な解法と言われている . ニュートン法とは異なり，連続であればどんな形の関数でも解に収束するので信頼性が高いのである .</p> <p>さらに，解の精度も分かる . 解の誤差は，区間の幅 <math> b - a </math> 以下である .</p> <p>解の探索の範囲を指定できる .</p> | <p>収束が遅い .</p>   |

## 6 練習問題

[練習 1] 二分法とニュートン法を用いて，以下の非線形方程式の実数の近似解を求めるプログラムを作成せよ .

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$$

$$x + e^x + \sin x = 0$$

[練習 2] ニュートン法を用いて，次の非線形方程式の複素数の近似解を求めるプログラムを作成せよ .

$$z^3 - 3z^2 + 9z - 8 = 0$$

ちなみに，複素数の近似解は，

$$z = 0.91704720793889364143180634077 + 2.45369996069857723147134512148i$$

$$z = 0.91704720793889364143180634077 - 2.45369996069857723147134512148i$$

である . 実数解は，

$$z = 1.16590558412221271713638731846$$

である .

[練習 3] ニュートン法を用いて，次の非線形連立方程式の実数の近似解を求めるプログラムを作成せよ．

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 - 3 = 0 \\ \sin x + e^{y-1} - 1 = 0 \end{cases}$$

ちなみに，近似解は，

$$(x = 3.85779488720852212145788558016052, \quad y = 1.504721878447614920479751585974204)$$

$$(x = 1.997355766768889566933536708853074, \quad y = -1.412340094158768341643120106831151)$$

である．さあ，この近似解が得られるように，がんばろう．

## 7 課題

### 7.1 内容

以下の課題を実施し，レポートとして提出すること．

[問 1] 練習問題の [練習 1] ~ [練習 3] のどれかを選択し，プログラムを作成せよ．

[問 2] 作成したプログラムを用いて，計算の反復回数と計算精度の関係のグラフを作成せよ．図 8 のようなグラフを作成せよ— ということ．

### 7.2 レポート提出要領

|      |  |
|------|--|
| 期限   | 8月8日(水) AM 8:45  |
| 用紙   | A4のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．  |
| 提出場所 | 山本研究室の入口のポスト   |
| 表紙   | 表紙を1枚つけて，以下の項目を分かりやすく記述すること．<br>授業科目名「計算機応用」<br>課題名「非線形方程式」<br>提出日<br>5E 学籍番号 氏名 |
| 内容   | 2ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．  |

## 付録 A ニュートン法の進んだ内容

4節では、ニュートン法により、実数解を求める方法を学習した。そのとき、連立方程式や複素数解が求められると述べた。そこで、諸君の将来のために、複素数解や連立方程式を求める方法を示しておく。内容は、実数解を求める方法とほとんど同じであるが、少しばかり概念を拡張する必要がある。いままでの学習内容を十分理解していれば、これから述べることは分かるであろう。理解できないにしても、いずれは理解できるものと期待している。内容が理解できなくても、なにか面白そうだと思ってもらえれば、十分である。さあ、実数解が求められた者は、より難しい非線形方程式の近似解を求めよう。

### 付録 A.1 非線形方程式の複素数解

#### 付録 A.1.1 実数解の場合の復習

複素数に進む前に実数のニュートン法の復習を行う。4節では、図によるニュートン法の説明を行い、漸化式を示した。この方法は、直感的で分かりやすいが、複素数解や非線形連立方程式を考える場合は無理がある。図で示すことができるのは2次元までで、それ以上になると図に示すことが不可能であるからである。そこで、別のアプローチから漸化式を導くことにする。異なった説明をしているようであるが、その根本精神は全く同じで、

- 解に近いところでは、直線で近似できる<sup>7</sup>。

ということである。

それでは、漸化式を求めることにする。いつものように、 $f(x) = 0$ の方程式の解を $x = \alpha$ とする。即ち、 $f(\alpha) = 0$ である。そして、 $i$ 番目の近似解を $x_i$ とする。ここから、 $\Delta x$ だけ移動したところの値は、

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_i)\Delta x^2 + \dots$$

ただし、 $\Delta x$ が小さい場合

$$\simeq f(x_i) + f'(x_i)\Delta x \tag{17}$$

となる。もし、 $f(x_i + \Delta x) = 0$ 、即ち、 $\alpha = x_i + \Delta x$ となるように、 $\Delta x$ を選ぶことができれば、解の計算は簡単である。この場合、式(17)の最後の式から、

$$\Delta x \simeq -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{18}$$

となる。したがって、 $\alpha = x_i + \Delta x$ から、次の近似解は

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{19}$$

となる。4節で、図により求めた漸化式13と同じである。異なる説明であったが、内容はまったく同じであることを理解して欲しい。

<sup>7</sup>解に近い必要はなく、実際には、狭い範囲は直線で近似できるということである。特異点は別。

## 付録 A.1.2 複素数解の場合

漸化式 実数とまったく同じ議論が、複素数でも成り立つ。ただし、複素関数で重要な特異点付近では、この方法は使えない。テイラー級数ではなく、ローラン級数の  $-1$  乗よりも小さい項が重要となるからである。実数の場合も、特異点はだめなのと同じである。ただし、ここでは特異点に関係ないので、複素関数でもテイラー展開が使える。 $f(z) = 0$  をみたく  $z$  は特異点ではない。

実数とまったく同じ議論より、方程式

$$w(z) = 0 \quad (20)$$

の近似解は、漸化式

$$z_{i+1} = z_i - \frac{w(z_i)}{w'(z_i)} \quad (21)$$

より求めることができる。この式の算出は、先ほどの実数の場合と全く同じである。

前回とは異なり、実数の場合の漸化式をグラフを用いなくて説明したのは、複素数に拡張するためである。複素数のグラフは大変である。

## 付録 A.2 非線形連立方程式の実数解 (2 元の場合)

前節では、ニュートン法による複素数の近似解を求める方法を示した。「非線形連立方程式」の近似解が求めれば、概ねニュートン法の学習は終わりである。ちょっと難しいが、ニュートン法の学習の仕上げとして「非線形連立方程式」の実数解を求める方法を示す。非線形連立方程式の複素数解を求めることが残っているが、この講義では示さない。今までのことを理解していれば、その方法も直ぐに理解できるであろう。興味のある人、あるいは必要に迫られた人は、自分で計算方法を考えてみよう。

### 付録 A.2.1 非線形連立方程式とは

今まで、諸君は「非線形の方程式」あるいは「線形の連立方程式」は解いたことがある。例えば、前者は、

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (22)$$

のようなものである。後者の例は、

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 10 \\ x + y + z = 6 \\ x + 2y + z = 11 \end{cases} \quad (23)$$

である。非線形方程式は未知数が 2 次以上のものをいい、連立方程式は未知数が 2 個以上のものをいうのである。非線形とは、直線でないという意味である。未知数が 2 次以上のもの、例えば  $x^3$  が式に含まれると、それは直線にならないので、非線形方程式になる。直線でないという意味からも、 $\sin x$  も非線形方程式を形づくる。この場合、 $x$  の次数は無限である。

複素数解まで含めると、非線形な  $n$  次方程式には  $n$  個の解がある。線形な連立方程式、 $n$  元 1 次方程式の場合、係数行列が特異でない限り、1 個の解がある。では、非線形な連立方程式、 $n$  元  $m$  次方程式の場合

合、複素数を含めた解の数は  $m$  個のように思えるが、正しいのだろうか？ 数学の先生に聞くと、正しいということである。

また、方程式の数と未知数の数は一致しなくてはならないのは、通常の連立方程式と同じである。それらの数が同じでも、線形連立方程式では、係数行列の行列式がゼロの場合、解は一意に決まらない。非線形の連立方程式の場合、これはどのような場合に対応するのだろうか？ 私には、分からない。かなり難しく興味深い問題のように思えるが、ここではそのことは考えないことにする。

#### 付録 A.2.2 非線形連立方程式の例

非線形連立方程式の近似解をニュートン法で計算する方法を示す。次に示す方程式

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 - 3 = 0 \\ \sin x + e^{y-1} - 1 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

の近似解を求めることを考える。2元?次非線形連立方程式である。?次とは、いささかいい加減に書いているが、勘弁してもらいたい。無限次といってよいような気がするが自信が無いので?マークを付けておく。

さて、この方程式の解であるが、それをグラフに示す。2元であればグラフに書くことができるのである。以下の議論は、任意の元の方程式でも成り立つことは理解して欲しい。これらの方程式をグラフに書くと図9のようになる。図中に示すように、点AとBに実数解があるのが分かるであろう。



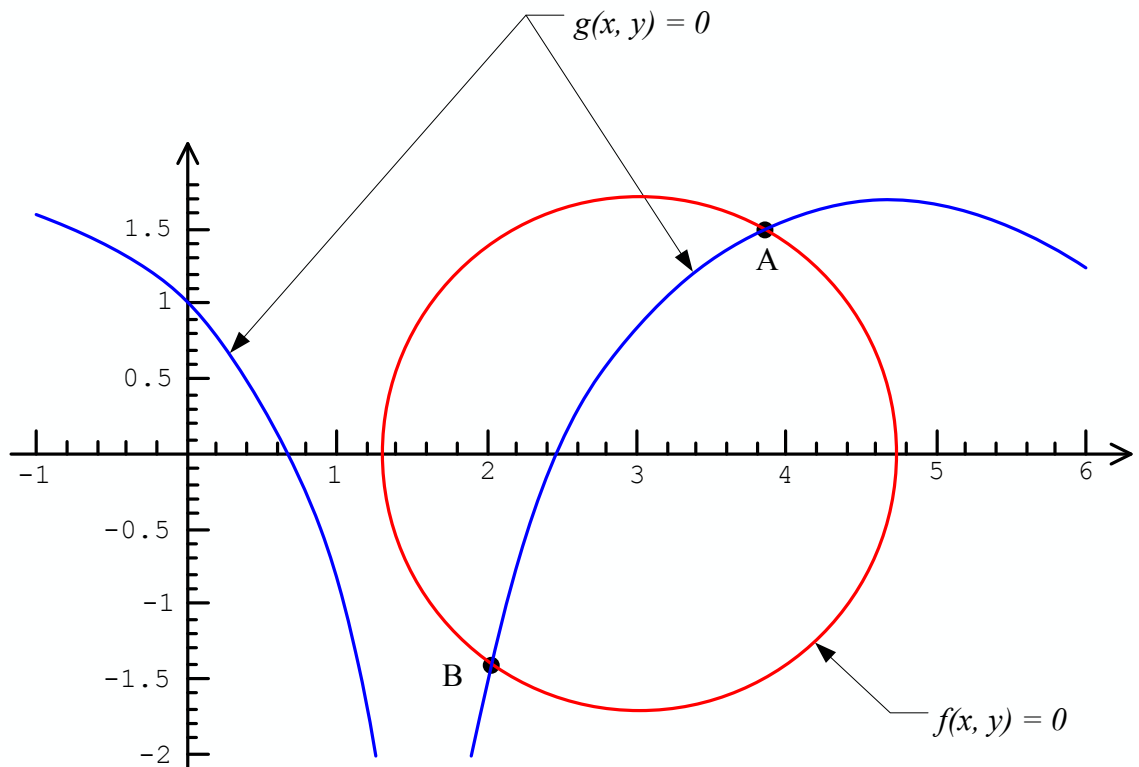


図 9: 非線形方程式のグラフと実数解

初期値から出発して、解である A や B 点に近づく方法を考える．そこで、次のような関数を考える．

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + y^2 - 3 \quad (25)$$

$$g(x, y) = \sin x + e^{y-1} - 1 \quad (26)$$

もちろん、 $f(x, y) = 0$  と  $g(x, y) = 0$  が同時に成り立つ、 $(x, y)$  を求めたいわけである．

いつものように、この非線形連立方程式の解を  $(\alpha_x, \alpha_y)$  とする．当然、 $f(\alpha_x, \alpha_y) = 0$  かつ  $g(\alpha_x, \alpha_y) = 0$  である．そして、 $i$  番目の近似解を  $(x_i, y_i)$  とする．ここから、 $(\Delta x, \Delta y)$  だけ移動したところの値は、

$$f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + O(\Delta^2)$$

ただし、 $(\Delta x, \Delta y)$  が小さい場合 (27)

$$\simeq f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

となる． $g(x, y)$  の場合も全く同じである．それら，2 つをまとめ， $\simeq$  を  $=$  に直すと

$$f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad (28)$$

$$g(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = g(x_i, y_i) + \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y \quad (29)$$

となる．

ここで， $f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = 0$  かつ  $g(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = 0$  となるように， $\Delta x$  と  $\Delta y$  を選ぶとする．このようにするためには， $\Delta x$  と  $\Delta y$  はつぎの連立方程式を満たせばよい．式 (28) と (29) の左辺をゼロとおき式を整理すれば

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_i, y_i) \\ -g(x_i, y_i) \end{pmatrix} \quad (30)$$

となる．この連立方程式を解いて， $(\Delta x, \Delta y)$  を求める． $\alpha_x \simeq x_i + \Delta x$  から，次の近似解は

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta x \\ y_{i+1} = y_i + \Delta y \end{cases} \quad (31)$$

となる．これが，非線形連立方程式の漸化式である．

### 付録 A.2.3 連立で無い場合とのアナロジー

以前の授業で示した方程式の実数解や複素数解を求めたのと同じようなことを，ここでも行った．式も似ているし，考え方も同じである．以前は，

- 解に近いところでは，直線で近似できる<sup>8</sup>．

のような性質を利用した．2 元非線形連立方程式でも同じで，

- 解に近いところでは，平面で近似できる<sup>9</sup>．

という性質を利用している．この性質を定量的に表したものがテイラー展開である．なるほどテイラー展開は便利なものである．

### 付録 A.3 非線形連立方程式の解 (多元の場合)

前節では，2 元非線形連立方程式のニュートン法での計算方法を示した．ここでは，それを一般化する．ここで示す方法は，複素数解にも適用できる．

<sup>8</sup> 解に近い必要はなく，狭い範囲は直線で近似できるということである．

<sup>9</sup> これも先ほどと同じで，解に近い必要はなく，狭い範囲は直線で近似できるということである．

N 元 の非線形連立方程式は ,

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) = 0 \\ \vdots \\ f_N(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

と書くことができる . 未知数は ,

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \quad (33)$$

とベクトルで表現する . すると ,  $i$  番目の方程式は ,  $f_i(\mathbf{X})$  と書き表されるので , 表現が簡単になる . これを , 先ほどと同じようにテイラー展開すると

$$f_i(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) = f_i(\mathbf{X}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \Delta x_3 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_N} \Delta x_N + O(\Delta\mathbf{X}^2) \quad (34)$$

となる .  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  の全てににおいて ,  $f_i(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) = 0$  になるように ,  $\Delta\mathbf{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_N)$  を選ぶ . そのように選ぶためには , 2 次以降の高次の項を無視すると

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \frac{\partial f_N}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \vdots \\ \Delta x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(\mathbf{X}) \\ -f_2(\mathbf{X}) \\ -f_3(\mathbf{X}) \\ \dots \\ -f_N(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \quad (35)$$

の線形である N 元 1 次連立方程式が成り立つ . これを解いて ,  $\Delta\mathbf{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_N)$  を求める . そうすると , より真の解に近い  $\mathbf{X}^{new}$  は ,  $\mathbf{X}^{new} = \mathbf{X}^{old} + \Delta\mathbf{X}$  と計算できる . しつこいようであるが , 成分で書き表すと

$$\begin{cases} x_1^{new} = x_1^{old} + \Delta x_1 \\ x_2^{new} = x_2^{old} + \Delta x_2 \\ x_3^{new} = x_3^{old} + \Delta x_3 \\ \vdots \\ x_N^{new} = x_N^{old} + \Delta x_N \end{cases} \quad (36)$$

となる

非線形の連立方程式を線形の連立方程式で計算しているわけである . 解きやすい式になった分 , 反復計算が必要となっている .