電気回路を例題にした常微分方程式の練習問題

山本昌志*

2007 年 11 月 18 日

概 要

電気回路を例題にして，微分方程式を数値計算する練習を行う．

1　はじめに

今まで学習してきた常微分方程式の数値計算を用いて，電気回路に関する問題を考える．3 つの回路の問題「CR 直列回路」と「LCR 直列回路」,「CR 発信回路」を数値計算により，回路に流れる電流を求める．いずれも，解析的に微分方程式は解けるものの結構面倒である．そこで，数値計算により解を計算することを試みる．

計算結果については，課題として提出すること．提出方法については，p.10 節の「レポート提出要領」に従うこと．

2　CR 直列回路

2.1　回路の理論

ここでは，常微分方程式の数値計算の練習問題として，図 1 に示す CR 直列回路に流れる電流を求める．回路の問題なので，キルヒホッフの法則—-回路の電圧を一周に渡って積分するとゼロ—を使うのがセオリーで，それは

$$\frac{Q}{C}+IR-V_0\sin(\omega t)=0 \tag{1}$$

となる．電荷 Q と電流の流れる方向は，図の通りである．このようにすると電流と電荷の関係は，

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=I \tag{2}$$

となる．Q の定義を逆にすると，電荷と電流の関係に負号が付くことを忘れてはならない．そして，式 (1) も負号が付く．この辺はなかなか分かり難いが，良く勉強しなくてはならない．今は回路の授業でないので詳細は述べないが，おもしろい内容が含まれる．

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

式 (1) を時間で微分して，電流と電荷の関係を用いると，

$$\frac{I}{C} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - \omega V_0 \cos(\omega t) = 0 \qquad\qquad I(0) = 0 \tag{3}$$

という微分方程式が得られる．時刻が $t = 0$ の時，電流がゼロという初期条件を課している．幸いなことに，この微分方程式には厳密解があり，それは

$$I(t) = \frac{V_0 \omega C \left[\cos(\omega t) + R\omega C \sin(\omega t) - e^{-\frac{t}{CR}}\right]}{1 + (R\omega C)^2} \tag{4}$$

となる．ちょっとだけ面倒な式になっているが，気にすることはない．諸君は，複素関数を使って，$t \to \infty$ のときの状態—定常状態—を別な方法で解くことができるであろう．それができれば十分である．ただ，過渡状態を見たい場合は，このようにちゃんと微分方程式を計算しなくてはならない．この微分方程式はたまたま解析解があったが，普通はこんなに都合はよくない．そういうときには，数値計算を使う必要がある．

今回の回路の問題では厳密解はあるが，練習を兼ねて数値計算で微分方程式を解いてみよう．

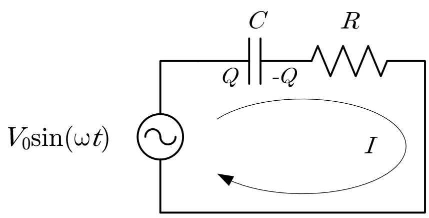

図 1: CR 回路

2.2 数値計算

回路に流れる電流を時刻 $0 \leqq t \leqq 1$ の間，オイラー法とホイン法 (2 次のルンゲクッタ法)，4 次のルンゲクッタ法で計算せよ．時刻と電流の値は，次のようにテキストファイルに書き出すこと．第 1 列:時刻，第 2 列:厳密解，第 3 列:オイラー法，第 4 列:ホイン法，第 5 列:4 次のルンゲ・クッタ法.

```
0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
1.000000e-04 1.985456e-04 3.141593e-04 1.570021e-04 1.963076e-04
2.000000e-04 2.713744e-04 3.140042e-04 2.352707e-04 2.697098e-04
3.000000e-04 2.977589e-04 3.135393e-04 2.740179e-04 2.968290e-04
4.000000e-04 3.068621e-04 3.127650e-04 2.928500e-04 3.063989e-04
5.000000e-04 3.094132e-04 3.116820e-04 3.015707e-04 3.091954e-04
6.000000e-04 3.093600e-04 3.102914e-04 3.050827e-04 3.092600e-04
7.000000e-04 3.081557e-04 3.085946e-04 3.058380e-04 3.081095e-04
```

長いので，この辺は省略

```
9.995000e-01 3.084431e-04 3.085946e-04 3.082924e-04 3.084380e-04
```

```
9.996000e-01 3.101389e-04 3.102914e-04 3.099872e-04 3.101339e-04
9.997000e-01 3.115287e-04 3.116820e-04 3.113761e-04 3.115236e-04
9.998000e-01 3.126111e-04 3.127650e-04 3.124577e-04 3.126060e-04
9.999000e-01 3.133849e-04 3.135393e-04 3.132310e-04 3.133798e-04
1.000000e+00 3.138495e-04 3.140042e-04 3.136951e-04 3.138444e-04
```

さらに，厳密解との差—誤差—の絶対値のファイルも作成すること．第 1 列:時刻，第 2 列:オイラー法の誤差，第 3 列:ホイン法の誤差，第 4 列:4 次のルンゲ・クッタ法の誤差．C と R の値をいろいろ計算してみよう．計算誤差がどのようになるか調べてみよう．

```
1.000000e-04 1.156137e-04 4.154344e-05 2.238011e-06
2.000000e-04 4.262985e-05 3.610366e-05 1.664613e-06
3.000000e-04 1.578046e-05 2.374101e-05 9.298990e-07
4.000000e-04 5.902889e-06 1.401218e-05 4.631933e-07
5.000000e-04 2.268803e-06 7.842526e-06 2.178372e-07
6.000000e-04 9.314720e-07 4.277303e-06 9.994238e-08
7.000000e-04 4.389742e-07 2.317686e-06 4.619756e-08
```

長いので，この辺は省略

```
9.992000e-01 1.478607e-07 1.467147e-07 4.904329e-09
9.993000e-01 1.492431e-07 1.481930e-07 4.952495e-09
9.994000e-01 1.504783e-07 1.495250e-07 4.995773e-09
9.995000e-01 1.515650e-07 1.507095e-07 5.034120e-09
9.996000e-01 1.525021e-07 1.517453e-07 5.067500e-09
9.997000e-01 1.532887e-07 1.526313e-07 5.095879e-09
9.998000e-01 1.539240e-07 1.533666e-07 5.119229e-09
9.999000e-01 1.544074e-07 1.539507e-07 5.137526e-09
1.000000e+00 1.547384e-07 1.543828e-07 5.150754e-09
```

3　LCR 直列回路

3.1　回路の理論

もっと実用的な常微分方程式を解くことにする．電気の諸問題の常微分方程式は 2 階の場合が多い．例えば，図 2 のような回路である．最初，コンデンサーにある電荷が蓄えられていたとする[1]．そうして，ある瞬間 (t=0) にスイッチ SW を ON にしたとする．この場合，回路に流れる電流は時間とともにどのように変化するか? 数値計算によりそれを求めることにする．

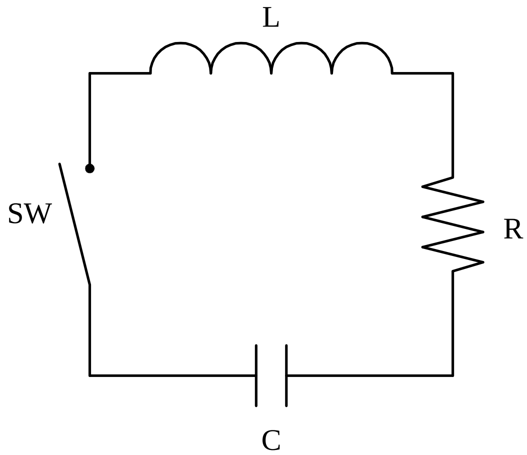

図 2: LCR 直列回路

まず，この回路に流れる電流の微分方程式を導かなくてはならない．これを，エネルギーという観点から考えよう．コンデンサーとコイルに蓄えられたエネルギーの時間的な変化が抵抗で消費される電力になる．コンデンサーに蓄えられるエネルギーは $\frac{1}{2}CV^2$ で，コイルに蓄えられるエネルギーは $\frac{1}{2}LI^2$ である．一方，抵抗で消費される電力は，I^2R である．これらの関係を式で表すと，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CV^2+\frac{1}{2}LI^2\right)+I^2R=0 \tag{5}$$

となる．

この式では，電流 I と電圧 V が時間の関数となっている．これでは見通しが悪いので，電圧の項をコンデンサーの式を用いて消去することを考える．コンデンサーに蓄えられる電荷を q とすると，$q=CV$ という関係がある．これから，$\frac{dq}{dt}=C\frac{dV}{dt}$ が直ちに導かれる．ここで，電荷量の時間変化は電流となるので，

[1]コンデンサーに蓄えられる電荷と言う表現をするが，実際にはコンデンサーには電荷は蓄えられない．各々の電極に $+q$ と $-q$ の電荷が現れるが，双方を合計するとゼロになる．

$\frac{dq}{dt} = I$ となることに注意する．これらの関係式を用いて，式 (5) を書き直す．すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}LI^2\right) + I^2R = 0 \\
&CV\frac{dV}{dt} + LI\frac{dI}{dt} + I^2R = 0 \\
&C\frac{q}{C}\frac{I}{C} + LI\frac{dI}{dt} + I^2R = 0 \\
&\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} + IR = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

の関係式を導くことができる．最後の式の両辺の時間で微分すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} + IR\right) = 0 \\
&\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} = 0 \\
&L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

となる．これで，電流 I のみ常微分方程式になる．この最後の 2 階の微分方程式を解けばよいわけである．

3.2 数値計算

2 階の常微分方程式を数値計算する場合，1 階の連立常微分方程式に直すのがセオリーである．これは，

$$\begin{cases} I_0 = I \\ I_1 = \dfrac{dI}{dt} \end{cases} \tag{8}$$

と変数変換を行う．すると，式 (7) の最後の式は，

$$\begin{cases} \dfrac{dI_0}{dt} = I_1 \\ \dfrac{dI_1}{dt} = -\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{I_0}{C} + RI_1\right) \end{cases} \tag{9}$$

と書き直せる．これを配布したテキスト「常微分方程式の数値計算法」で示している高階の微分方程式の数値計算法を使い 4 次のルンゲ・クッタ法で近似解を求める．

これを解くためには，L と C，R の値と初期条件が必要である．それぞれを以下のようにする．

- インダクタンス L とキャパシタンス C は，1 とする．
- スイッチ SW を ON にした瞬間 (t=0)，インダクタンス L があるので電流は流れない．$I(0) = 0$ となる．また，$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = 1$ とする．$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = 1$ になるような電荷が蓄えられているわけである．

このような状況のもと，以下の場合について計算せよ．

1. まずはじめに，$R = 1$ の場合について，電流の様子を計算せよ．

2. $R = 0, 1, 2, 3, 4$ の場合について，電流の様子を計算せよ．臨界減衰の時，どうなるか?

3. 抵抗が電流に比例する場合 $R = kI$，どうなるか計算せよ．$k = 0.1, 1, 10$ の場合を計算してみよう．このような場合，非線形な方程式になる．従って，通常は解析解ないが，数値計算は可能である．コンピューターは，すばらしい結果を与えてくれる．

プログラムのヒントをあたえよう．I_{0_n} と I_{1_n} は，それぞれ `I0[n]` や `I1[n]` のような配列に格納する．そして，初期値は `I0[0]`$=0$ と `I1[0]=1` で表せる．ついでに時刻も配列 `time[n]` を使う．当然，`time[0]=0` で，`time[n+1]=time[n]+h` のように計算する．最終的な解は，`I0[n]` と `time[n]` の関係が重要になる．

4　CR 発振回路

この回路は，3 年生の実験実習の「発振回路 」で，実際に実験を行った回路である．ここでは，実験ではなく，計算機シミュレーションで発振する事を確かめる．

4.1　回路の理論

3 年生の実験実習の「発振回路 」では，図 3 の回路の実験を行った．

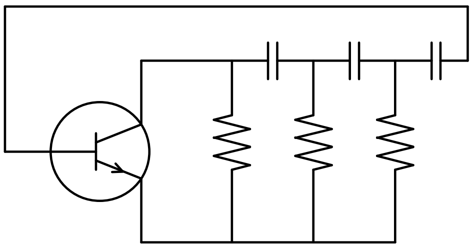

図 3: CR 発振回路．バイアスやトランジスタ駆動用の電源は省いている．

この回路のままだと，計算が大変なので，トランジスターを h パラメーターを用いて表現する．それは，図 4 のようになる．これを，1 周にわたって閉回路の電位差を足しあわせるとゼロになるというキルヒホッフの第 2 法則を表現しやすいように表したものが図 5 である．それぞれの図の回路は全く同じであることに注意せよ．

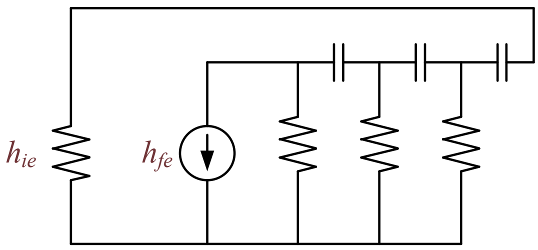

図 4: h パラメーターを用いた等価回路

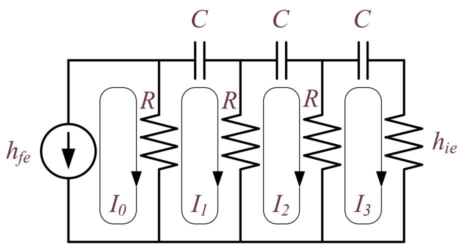

図 5: 書き直した等価回路

図 5 にしたがい回路に流れる電流が満たす微分方程式を求める．まず，キルヒホッフの法則から，

$$
\begin{aligned}
&(I_0 - I_1)R - \frac{1}{C}\int_0^t I_1 dt + (I_2 - I_1)R = 0 \\
&(I_1 - I_2)R - \frac{1}{C}\int_0^t I_2 dt + (I_3 - I_2)R = 0 \\
&(I_2 - I_3)R - \frac{1}{C}\int_0^t I_3 dt - I_3 h_{ie} = 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

が成り立つことがわかる．言うまでもないが，回路の電流 I_0, I_1, I_2, I_3 が時間の関数である．このままでは，ルンゲ・クッタ法で計算するのは困難なので，これらの式を時間で微分する．すると

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dI_0}{dt}-\frac{dI_1}{dt}\right)R-\frac{I_1}{C}+\left(\frac{dI_2}{dt}-\frac{dI_1}{dt}\right)R=0\\
&\left(\frac{dI_1}{dt}-\frac{dI_2}{dt}\right)R-\frac{I_2}{C}+\left(\frac{dI_3}{dt}-\frac{dI_2}{dt}\right)R=0\\
&\left(\frac{dI_2}{dt}-\frac{dI_3}{dt}\right)R-\frac{I_3}{C}-h_{ie}\frac{dI_3}{dt}=0
\end{aligned} \tag{11}$$

となる．このままだと，式が 3 個で未知数が 4 個なので，解くことができない．ここで，トランジスターの h パラメーターを導入する．トランジスターの特性より

$$I_0=-h_{fe}I_3 \tag{12}$$

となる．すると，解くべき式は，

$$\begin{aligned}
&\left(-h_{fe}\frac{dI_3}{dt}-\frac{dI_1}{dt}\right)R-\frac{I_1}{C}+\left(\frac{dI_2}{dt}-\frac{dI_1}{dt}\right)R=0\\
&\left(\frac{dI_1}{dt}-\frac{dI_2}{dt}\right)R-\frac{I_2}{C}+\left(\frac{dI_3}{dt}-\frac{dI_2}{dt}\right)R=0\\
&\left(\frac{dI_2}{dt}-\frac{dI_3}{dt}\right)R-\frac{I_3}{C}-h_{ie}\frac{dI_3}{dt}=0
\end{aligned} \tag{13}$$

である．これが，回路の電流を表す微分方程式である．

これらの連立の微分方程式を 4 次のルンゲクッタ法で計算すれば良いのであるが，もう少し変形する必要がある．$dI/dt=f(I,t)$ のような，形にする．これは，連立方程式なので，変形は面倒であるが可能である．計算し易いように変形[2]すると

$$\begin{aligned}
\frac{dI_1}{dt}&=-\frac{(2h_{ie}+R)I_1+(h_{ie}-h_{fe}R+R)I_2+R(1-2h_{fe})I_3}{CR(3h_{ie}+R+h_{fe}R)}\\
\frac{dI_2}{dt}&=-\frac{(h_{ie}+R)I_1+2(h_{ie}+R)I_2+R(2-h_{fe})I_3}{CR(3h_{ie}+R+h_{fe}R)}\\
\frac{dI_3}{dt}&=-\frac{I_1+2I_2+3I_3}{C(3h_{ie}+R+h_{fe}R)}
\end{aligned} \tag{14}$$

となる．

4.2 計算条件

常微分方程式を以下の条件で計算せよ．トランジスターの特性については，私は素人で全く知らないので，適当に仮定している．それでも，発振の基本的なメカニズムは分かるであろう．

- 計算を簡単にするために $C=1, R=1$ とせよ．また，トランジスターの入力インピーダンスは小さいので，$h_{ie}=0$ とせよ．増幅率は，$h_{fe}=20, 28, 29, 30, 40$ のおのおので計算し，I_3 の電流をグラフにせよ．なにが起きているか? 周波数は，付録の理論計算と合っているか?

[2]Mathematica の助けを借りて変形した

- 先の計算が終われば，増幅率が電流 I_3 の関数である場合について，考察する．一般に，トランジスターは電流が増加すると増幅率は下がる．このことにより，発信の成長が止まり，振幅が一定になる．増幅率が
$$h_{fe} = 40 - I_3 \tag{15}$$
とした場合 (図 6) について計算せよ．この場合は，うまく発振しない．なぜか?
- 次に，増幅率が
$$h_{fe} = 40 \times \exp\left(-\frac{I_3^2}{2}\right) \tag{16}$$
の場合 (図 7) について，計算してみよう．この場合は，安定に発振する．なぜか?．安定状態の波形は正弦波になっているだろうか?．なぜ，そのような波形になるか，考えてみよう．

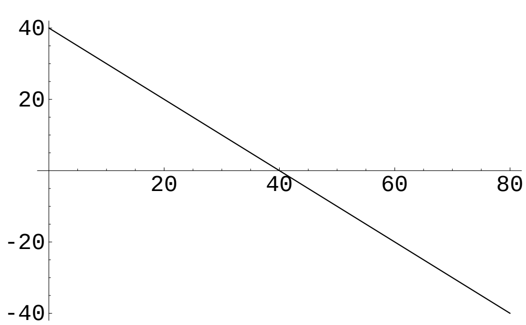

図 6: 1 次関数で増幅率が変化

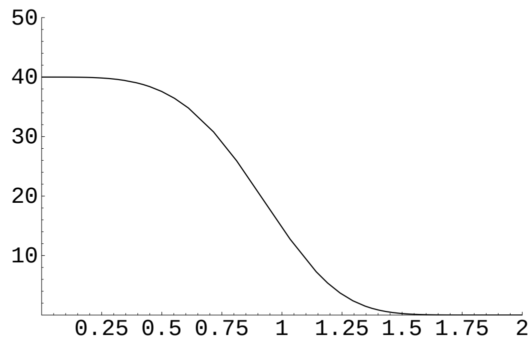

図 7: ガウス分布で増幅率が変化

これを計算する場合のヒントを与えておく．発振の成長は，種信号の増幅の繰り返しである．実際の発振器の種信号は，熱雑音であったり，スイッチの ON/OFF のノイズであったりする．計算機でシミュレーションする場合，それは，$I_1(0)$ または $I_2(0)$，$I_3(0)$ のいずれかの一つに非常に小さい値を与えれば良い．そして，残りの 2 つは，ゼロとしておく．

CR 発振回路の詳細については，私のホームページの講義ノート (2003 年度の実験) を見よ．CR 発振回路の発振周波数は
$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{6}CR} \tag{17}$$
である．また，発振条件は，トランジスターの入力インピーダンスを $h_{ie} = 0$ とした場合，
$$h_{fe} > 29 \tag{18}$$
である．

5　連立微分方程式に変換

以下の高解常微分方程式を連立 1 階微分方程式に書き換えよ．

(1) $y'' + 3y' + 5y = 0$

(2) $y'' + 6y' + y = 0$

(3) $5y'' + 2xy' + 3y = 0$

(4) $y''' + y' + xy = 0$

(5) $5y'' + y' + y = \sin(\omega x)$

(6) $xy'' + y' + y = e^x$

(7) $5y''y' + y' + y = 0$

(8) $y''y' + x^2y'y + y = 0$

6　レポート 提出要領

提出方法は，次の通りとする．

期限	10 月 25 日 (木)24:00 まで
用紙	A4
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	以下の項目を書いた表紙を 1 枚つけること． 授業科目名「計算機応用」 課題名「常微分方程式の練習」 5E　学籍番号　氏名 提出日

レポートの内容は，以下のとおりとする．

- 次の 3 つの回路のうち，いずれか一つ以上をプログラムを作成し，計算せよ．プログラムと計算結果をレポートしてまとめよ．いずれも，回路のパラメーターも記述すること．
  - p.1 の「CR 直列回路」
  - p.4 の「LCR 直列回路」
  - p.7 の「CR 発信回路」
- p.10 の「連立微分方程式に変換」の問題を解け．式の変形は，できるだけ丁寧に行い，説明や途中の計算を省かないこと．