

電磁気学とはどんな学問か

山本昌志*

2006年5月24日

概要

電磁気学と何か—ということを簡単に述べる．電磁気がかかわる現象を最初に示す．そして，もっとも基本的なクーロンの法則について，電磁気の作用の一例を示す．最後に，場の考え方を簡単に説明する．

1 本日の授業内容

本日は，電磁気学についての最初の講義である．そこで，電磁気学がどのようなものか—ということをお話す．本日の講義では，電磁氣的な力について説明する．以下のことを理解して欲しい．

- 電磁氣的な力は非常に強い．そして，その力により，物質が形作られている．
- クーロンの法則
- 力の伝わり方

2 電磁氣的な現象

2.1 自然界の力

まずは，非常に基本的なことからはじめる．自然界には，次に示す4つの力がある．というか，この4つの力しか発見されていない．たった，4つである．

弱い力 原子核のベータ崩壊などの原因となる(粒子の種類を変えることの出来る)力．日常は経験することのない力だが，ミクロの世界では重要な役割を果たす．作用を及ぼす距離は，大体 10^{-18} [m] である．

強い力 クォークを結び付け，陽子 (p) や中性子 (n) を作り，またそれらから原子核を作る力．作用を及ぼす距離は，大体 10^{-15} [m] である．

重力 質量がある物質にの間に働く引力．作用を及ぼす距離は無限大と考えられている．

電磁力 電気を帯びた粒子にはたらく力．電子と原子核を結び付け原子を作る力，原子同士を結び付け分子を作る力は，電磁気力である．作用を及ぼす距離は無限大と考えられている．

*国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

この4つが全てであるので、その1/4を電磁気的な力が占めているのである。弱い力と強い力は、非常に短い距離しか作用を及ぼさないで、日常生活では全く無視できる。一方、重力と電磁力は、非常に遠方まで作用を及ぼし、日常感じる事ができる。後で述べるが、電磁力は重力に比べてとてつもなく大きい。そのため、世の中を形作るのは電磁力が主な作用を及ぼしていることになる。その電磁力、あるいはそれに関係することを諸君は学習することになる。

2.2 電磁気力が関係する現象

肩の力を抜いて、みんなで、以下について考察しよう。これを考えることで、日常、経験することの大部分は電磁気力が関係することを理解して欲しい。

- 日常生活で感じる力は、どんなものがあるか?
- それが、先に示した力とどのようにかかわっているか?
- 力以外で、電磁気的な事柄がかかわることはどんなものがあるか?
- 日常生活で、電磁気的な事柄がかかわらないことはどんなことがあるか?
- そもそも、力とは何だろうか?.

3 電磁気学の基本法則

古典物理学の2つの柱は、ニュートン力学と電磁気学である。いずれもベクトルをつかった微分方程式が書かれることが多く、ニュートン力学では

$$F = \frac{dp}{dt} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } p &= m \frac{dr}{dt} \text{ で } m \text{ が一定とすると} \\ &= m \frac{d^2r}{dt^2} \end{aligned} \tag{2}$$

となる。これが Newton の運動の第2法則 (Newton's Second Law of Motion) である。通常はこれを積分して、運動を求めることになる¹。

これに対して、電磁気学の法則は、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D &= \rho & \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} &= j & \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

と書かれる4組の連立の微分方程式である。これをマクスウェルの方程式 (Maxwell equations) という。ここで、

¹運動の法則の残りの2つは、慣性の法則と作用反作用の法則である。

記号	物理量	単位	スカラー/ベクトル
D	電束密度	$[\text{C}/\text{m}^2]$	ベクトル
B	磁束密度	$[\text{T}]$ あるいは $[\text{Wb}/\text{m}^2]$	ベクトル
H	磁場 (の強さ)	$[\text{A}/\text{m}]$	ベクトル
E	電場 (の強さ)	$[\text{V}/\text{m}]$	ベクトル
ρ	電荷密度	$[\text{C}/\text{m}^3]$	スカラー
j	電流密度	$[\text{A}/\text{m}^2]$	ベクトル

である．こんなものはまだ理解する必要はない．この授業の最後で理解すべきものとなる．ただ，基本方程式というものがあることは分かって欲しい．

力学では，基本方程式が与えられてから，それを問題に適用することを学習する．それに対して，ここでの電磁気学では，最後の方に基本方程式を導くことになる．力学の基本方程式は，直感的にある程度理解できるので，最初に基本法則を教えるのが可能である．一方，不幸なことに，電磁気学の基本式 (3) は複雑で，直感的に理解することは不可能である．そのため，基本式にたどり着く前に，いろいろと修行する方法がとられる．

話は変わるが，電気回路のもっとも基本的な法則であるオームの法則やキルヒホッフの法則もこのマクスウェルの方程式から，ある近似をして導くことができる．電気回路といえども電磁気的な現象なので，マクスウェルの方程式から計算できるのである．ただ，計算が大変なので，近似であるオームの法則を使う．通常であれば，それで十分な精度を得ることができる．流体力学でも，似たような話がある．分子の衝突の計算をしないで，流体の方程式を計算するのと同じ状況にある．

おもしろいことに，回路の動作が高速になるとオームの法則ではだめな場合が生じている．高速の CPU の設計にオームの法則ではなく，マクスウェルの方程式が使われることがある．

4 クーロンの法則

4.1 クーロン力とその大きさ

電磁気学の最初の学習はクーロンの法則から始めることが多い．教科書に沿って，ここでもそれから始める．図 1 に示すように 2 つの電荷の間に働く力の関係を表すのが発見者の名前を付けてクーロンの法則という．教科書では，それを

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \quad (4)$$

と書いている²．ここで， F は力 (単位は $[\text{N}]$)， Q と q が作用する 2 つの電荷量 (単位は $[\text{C}]$)， R は電荷間の距離 (単位は $[\text{m}]$) である．そして， $4\pi\epsilon_0$ は比例定数で， 4π がつくのは後で式を簡単にするためである． ϵ_0 は，真空中の誘電率で $8.85418782[\text{F}/\text{m}]$ である．力の方向は，電荷の積が負の場合引力，正の場合斥力となる．

²この式が万有引力の法則 ($F = GMm/r^2$) とよく似ていることに注目せよ．

この力と重力の大きさを比べてみよう．2つの電子間に働く力の比は

$$\begin{aligned}
 \frac{F_e}{F_g} &= \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2}}{G \frac{m_e^2}{R^2}} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \left(\frac{e}{m_e} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4 \times 3.1415 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.67 \times 10^{-11}} \left(\frac{1.60 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}} \right)^2 \\
 &= 4.1 \times 10^{42}
 \end{aligned} \tag{5}$$

となり，電氣的なクーロン力の方が 10^{42} 倍も大きいのである．このことについて，ファインマンは，次のように述べている [1]．

全ての物質は正の陽子と負の電子電子との混合体で，この強い力で引き合い反発しあっている．しかしバランスは非常に完全に保たれているので，あなたが他の人の近くに立っても力を感じることは全くない．ほんのちょっとでもバランスの狂いがあれば，すぐに分かるはずである．人体の中の電子が陽子より1パーセント多いとすると，あなたがある人から腕の長さのところに立つとき，信じられない位強い力で反発するはずである．どの位の強さだろう．エンパイア・ステート・ビルを持ち上げるくらいだろうか．エベレストを持ち上げるくらいだろうか．それどころではない．反発力は地球全体の重さを持ち上げるくらい強い．

この非常に強い力により，物質全体は中性になる．そうでないと，物質はバラバラになってしまう．また，物質を電子や原子のオーダーで見ると，電荷の偏りがあり，そこではこのクーロン力が働く．この強い力により，原子が集合して，固い物質が形作られるのである．

そうなると，電子が原子核に落ち込んでしまうのではないか—という疑問が湧く．実際にはそのようなことは起きていない．この現象は不確定性原理から説明がつく．仮りに，電子が原子核に衝突するくらい狭いところに近づいたとする．そうなると，位置が正確に分かるので，運動量の不確定性が増す．したがって，電子はとても大きな運動量を持つことになる．すると，遠心力が大きくなり，原子核から離れようとする．近づこうとすると大きな運動量を持つことになり，遠心力が働き近づけなくなるのである．

大きなクーロン力により，原子核がバラバラにならないのか—という疑問も湧く．例えばウラン 235 の原子核は，92個の陽子と143個の中性子からできている．その半径は，大体 7×10^{-15} [m] である．この狭い中に，正の電荷をもつ92個の陽子が，クーロン力に抗して押し込められているのである．クーロン力によりバラバラにならない理由は，強い力が作用しているためである．この強い力により，原子核ができあがっている．

最初に述べたように，強い力の範囲は 10^{-15} [m] 程度である．したがって，ウランより大きな原子核を作ることは難しくなる．そのため，ウランより大きな原子番号をもつ元素は自然では，存在しない．

ほとんどの元素の原子核では，クーロン力よりも強い力の方が圧倒的に大きい．そのため，原子核は極めて安定となる．一方，ウラン 235 の場合，両者の力の大きさの差は小さく，強い力の方がちょっとだけ大きい．そのため，他の物質に比べるとウラン 235 の原子核は不安定となる．ちょっと刺激を与えると，原子核はバラバラになってしまう．原子核に中性子をぶつけることにより，刺激を与えることができる．ウラン 235 原子核に中性子をぶつけるのが原子爆弾であり，原子力発電である．バラバラになった原子核は，クー

ロン力により、とても高速に加速される。そのため、大きなエネルギーを持ち、最終的には熱に変わるのである。原子力といえども、そのエネルギーの源は電磁気力である。

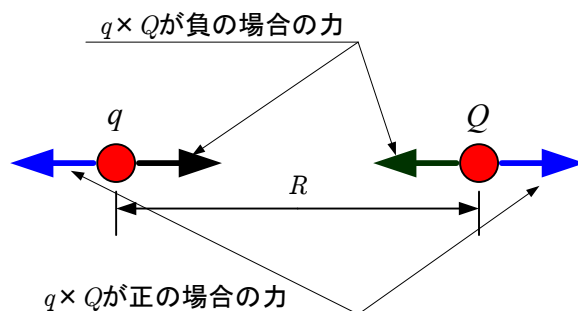


図 1: クーロン力

4.2 ベクトルを使った表現

式 (4) では、クーロンの法則をスカラー量で記述している。左辺の力は、ベクトル量のはずである。そうすると、右辺もベクトルにする必要がある。式 (4) を見直すと、それは力の大きさしか述べてないことが分かる。クーロンの法則を正確に述べると、

- 2つの電荷の間に働く力の大きさは、電荷の積に比例し、距離の2乗に反比例する。
- 力の方向は、ふたつの電荷を結ぶ直線上にある。電荷の積が負の場合引力で、正の場合斥力となる。

である。したがって、式 (4) はクーロンの法則の半分しか述べていないのである。この2つのことを、一度に表現するために、ベクトルを使う方が適切である³。クーロンの法則は

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|r_2 - r_1|^2} \frac{(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|} \quad (6)$$

と書くべきであろう。ここで、 F_{12} は、電荷量 Q_1 の物体が電荷量 Q_2 の物体に及ぼす力である。位置ベクトルのと力の関係は、図2のとおりである。この式が言っていることは、「力の大きさは距離の2乗に反比例し、電荷の積に比例する」と「力の方向は、ふたつの物体の直線上を向いており、電荷の積が負のとき引力、正のとき斥力となる」である。

言葉で述べると複雑な現象が、ベクトルを用いると式 (6) のように簡単に書ける。ベクトル解析は、まことに便利である。

クーロンの法則について、次のことについて考察してみよう。

- 世の中に電荷が2つしかないとする。この場合、それぞれの電荷の大きさ調べる手立はあるか？
- それでは、電荷が3つある場合はどうか？

³砂川大先生の教科書に文句を言っているわけではない。教科書は理解しやすくするためにあえてベクトルを使っていないだけである。

- 電子の電荷は $e = -1.602892 \times 10^{-19}[\text{C}]$ である．電子の電荷がなぜ負になっているか，考えてみよう？
- クーロン力は，距離の-2 乗に比例する．なぜ，-2 という丁度の数字なのか？．これは必然か？．-2.0001 では不都合なのか？
- クーロン力は，各々の電荷の積の 1 乗に比例する．なぜ，1 という丁度の数字なのか？．これは必然か？．1.00001 では不都合なのか？
- 式からクーロン力の方向は，2 つの電荷の延長線上である．延長線上である必然はあるか？．他の方向を向くとどのような不都合があるか？

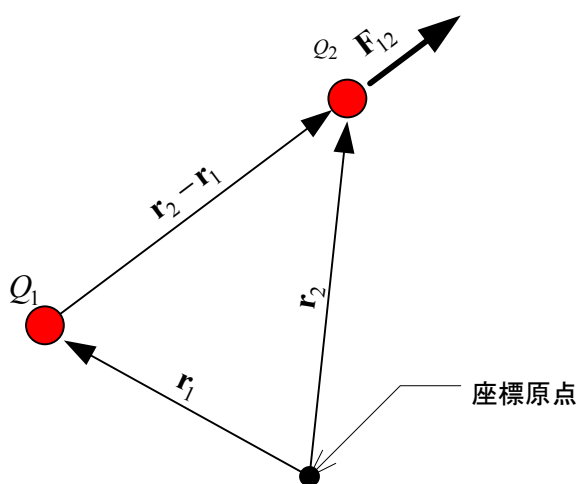


図 2: クーロン力．ベクトルを使った表現

4.3 作用・反作用の法則

自然界の力は，必ず作用・反作用の法則

- 物体 B が物体 A から力 F_{AB} 受けるとする．すると，物体 A も物体 B から力を受け，その力 F_{BA} は F_{AB} と大きさは同じで反対方向を向いている．さらに，両者の力はお互いに一直線上にある．

が成り立っている．これが成立しないと，エネルギー保存則—正確には運動量保存則と角運動量保存則—が破れることになり，永久機関ができてしまう．

クーロンの法則も，この作用・反作用の法則が成り立っていることを示す．電荷量 Q_1 の物体が電荷量 Q_2 の物体に及ぼす力 F_{12} は，式 (6) のとおりである．逆に，電荷量 Q_2 の物体が電荷量 Q_1 の物体に及ぼす力 F_{21} はどうなっているだろうか？． Q_2 の物体についてもクーロンの法則が成り立つはずであるから，この力を求めるためには式 (6) の添え字の 1 と 2 を入れ替えればよい．

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (7)$$

式 (6) と式 (7) を比べると,

$$F_{21} = -F_{12} \quad (8)$$

の関係があることが分かる。この式は、2つの電荷に働く力の大きさが等しく、向きが反対であると言っている。そして、これらの力は一直線上にある。これは、作用・反作用の法則と呼ばれるものである。クーロンの法則も作用・反作用の法則が成り立っている。

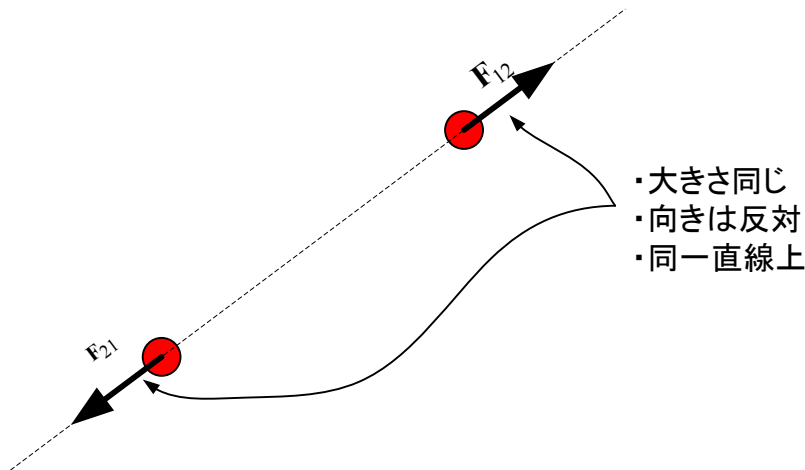


図 3: 作用・反作用の法則

4.4 おまけ

クーロンの法則の発見の歴史的経緯はおもしろい⁴。まず最初の登場人物は、ジョセフ・プリーストリーと、あのベンジャミン・フランクリンである。プリーストリーは、フランクリンに示唆されて実験を行い、中空の物体を帯電させて、その内側では電気的な作用が無いことを発見した。重力の場合との類推で、電気的な力が距離の逆2乗で伝わると実験結果の意味を考えた。これと同じ原理で⁵、1772年にキャベンディッシュは巧妙な実験を行い、かなりの精度で逆2乗が成り立つことを発見した。変人キャベンディッシュは、その結果を公表しなかった。そのため、最後にクーロンが登場することになる。クーロンは、1785年にねじれ秤を使った実験により、力の逆2乗の法則を発見し発表した。そして、それ以降、クーロンの法則と呼ばれるようになった。

キャベンディッシュの実験は非常に巧妙で、クーロンのものよりも精度はかなり高かったようである。その実験は、今で言うノーベル賞級の発見ではあるが、彼はそれを公表しなかった。その発見の価値も知っていたにも関わらずである。ということで、物理学者中の変人ナンバーワンとしても良いだろう。

その後、キャベンディッシュは、ねじれ秤を使って、1789年に万有引力定数を測定している⁶。ここでは、クーロンのねじれ秤を使っていることが、面白い。

⁴この辺の経緯の話は、参考文献 [2] と [3] に書かれている内容をまとめたものである。

⁵キャベンディッシュがジョセフ・プリーストリーの実験のことを知っていたかは分からない。

⁶これは公表したようである

5 力の伝わり方

5.1 遠隔作用

図2の電荷1が電荷2に及ぼす力が、媒介が無くても伝わると考えるのが遠隔作用である。この解釈は受け入れがたく、通常は使われない。ニュートンが万有引力の法則を発表したとき、それは遠隔作用で、なかなか受け入れがたかったようである。何もない真空を通過して、力が伝わることに人々は難色を示したのである。日常、見たり感じたりする力は、何かの媒質が介在するものである。液体や固体、気体を通して力は感じるものである。でも、当時は磁石による力は分かっていた、それは遠隔作用に思える。人々はどのように考えていたのか興味がある⁷。

気とか超能力とか言う人は、遠隔作用を支持しているように思えるが、いかがなものか。

5.2 近接作用

図2の電荷 Q_1 が直接 Q_2 に作用するのではない。まず Q_1 は、その近くの空間の物理的な状態を変化させ、それ変化が次々と伝わり、 Q_2 に達した時点で、それに影響を及ぼす。 Q_1 は空間(場)に作用を及ぼし、 Q_2 は空間から作用を及ぼされるのである。これは、明らかに遠隔作用ではなく、近接作用と呼ばれる。これが場の考え方である。

観測される結果が遠隔作用と同じであれば、ただの言い換えに過ぎない。遠隔作用と近接作用の決定的に異なることがある。それは、作用が伝わる時間である。遠隔作用では瞬時に影響が伝わるが、近接作用では有限の時間が必要である。観測の結果、影響が伝わる速度は、光速と同じである。

電荷を急激に変化させて、その影響が有限の時間で伝わるのが分かっている。電波などがその例で、人類はそれを利用しているのである。同じように質点を急激に変化させるとその波(重力波)が観測されると理論的に考えられている。しかし、前にも述べたとおり、重力は非常に小さいのでその観測は大変難しく、まだ重力波のはっきりした証拠は見つかっていない。

6 課題

[問1] 一直線上に a [m]をへだてて q_1, q_2, q_3 [C]の三つの点電荷がある。(1)それぞれの電荷に働く力を求めよ。(2)3電荷が平衡にあるためには、 q_1, q_2, q_3 をどのように選べばよいか。

[問2] 質量 m [kg]、電荷 Q [C]の小球2個をそれぞれ長さ ℓ [m]の絶縁糸で同一点から吊したとき、糸が角度 θ だけ傾いたとすれば、次の関係のあることを示せ。

$$16\pi\epsilon_0 mg\ell^2 \sin^3 \theta = Q^2 \cos \theta$$

参考文献

[1] Richard P. Feynman. 電磁気. ファインマン物理学 3. 岩波書店, 1983.

⁷たぶん、山本義孝の「磁力と重力の発見」にこのことが書かれていると思われる

[2] J. D. Jackson. ジャクソン 電磁気学 (上). (株) 吉岡書店, 原書第 3 版, 2002.

[3] Edward M. Purcell. 電磁気 上. バークレー物理学コース 2. 丸善 (株), 第 2 版, 2002.