

# ベクトルの性質と加算

山本昌志\*

2005年4月13日

## 1 物理学における対称性

ここでは、物理法則を記述するときに、ベクトルを使う理由を述べる。数学と異なり、物理学ではベクトルを使わなくてはならない特別な理由がある。それは、座標軸の平行移動や回転に対して、物理の基本法則を示す方程式が変わらないということに関係する。電磁気学でも、このことは成り立つが、力学でそれを示す。これから学習する電磁気学方程式は複雑なので、最初の例としてふさわしくない。そこで、方程式が単純な力学を使うことにする。

このあたりの話の種本は「ファインマン物理学Ⅰ力学」[1]である。

### 1.1 対称性

力学や電磁気学、さらに他の物理学の分野の基本法則は、平行移動や回転に対して対称である。ここで、対称と言う意味は、ファインマンはヘルマン・ワイルの言葉を借りて

ひとつのものにある操作をしたとき、もとと同一に見えるならば、そのものは対称であるという。例えば左右対称な花瓶があるとき、それを鉛直軸のまわりに180°まわすと、まえと同じように見える。

と言っている[1]。電磁気学を含んだ物理の基本法則が、平行移動や回転に対して対称であることは、直感的に理解できる。それは、我々が住んでいる世界には座標をきめる特別な原点はないということと、座標軸を決める特別な軸がないことから分かる。このことを「空間は等方である」という。本当に、そうなのか?。特別な原点や特別な軸を示す現象を捜してみよう。見付からないはずである。

### 1.2 平行移動

それでは平行移動に関して、物理の基本法則である力学が対称であることを示そう。ベクトルを使わない力学の方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z \quad (1)$$

---

\*国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

である。問題は、この座標の原点と軸の方向である。まずは、座標の原点としてどこを選んでも方程式が同じであることを示す。

これから、原点はどこでも良いことを示そう。A 君と A' 君がある質点の運動を異なる原点を使って観測したとする。A 君の座標を  $(x, y, z)$ 、A' 君の座標を  $(x', y', z')$  とする。それぞれは、

$$x' = x - a \qquad y' = y - b \qquad z' = z - c \qquad (2)$$

の関係がある。これは、原点は異なるが、軸の方向は一致していると言っている。A 君の座標系で、運動方程式 (1) が成り立っているとすると、同じように、A' 君の座標系でも運動方程式

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F'_x \qquad m \frac{d^2 y'}{dt^2} = F'_y \qquad m \frac{d^2 z'}{dt^2} = F'_z \qquad (3)$$

は成り立つのであろうか？

質点にかかる力は、A 君から見ても A' 君から見ても同じである。そして、力の各方向の成分は、全ての力に力の軸と座標の軸との方向余弦 ( $\cos \theta$ ) をかけたものである。これと両者の座標軸の方向が一致していることから、

$$F'_x = F_x \qquad F'_y = F_y \qquad F'_z = F_z \qquad (4)$$

となる。両者の力の各方向の成分は同一になる。これは、直感的に当たり前である。

次に、式 1 の加速度を考える。A' 君の座標系での加速度は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} &= \frac{d^2(x - a)}{dt^2} \\ &= \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{d^2 a}{dt^2} \\ &\qquad \text{原点の距離 } a \text{ は一定なので} \\ &= \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned} \qquad (5)$$

となる。y, z 方向もおなじなので、

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad \frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad \frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} \qquad (6)$$

となる。原点が異なっても、加速度は同一となる。

式 (4) と (6) より、A 君の座標で運動方程式 (1) が成り立てば、A' 君でも同じような運動方程式 (3) が成り立つ。これは、運動方程式は、座標の原点とは関係なく成り立つことを言っている。座標の原点はどこをとってもよいのである。

### 1.3 回転

ニュートンの運動方程式—物理の基本法則—が軸の回転に対しても対称であることを確認する。図 1 のように、原点は同じで、z 軸を回転軸として  $\theta$  回転させた 2 つの座標系での運動方程式を考える。回転する前の A 君の座標系の運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \qquad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y \qquad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z \qquad (7)$$

である．座標を回転させたときの A' 君の座標系でも同じように

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F'_x \quad m \frac{d^2 y'}{dt^2} = F'_y \quad m \frac{d^2 z'}{dt^2} = F'_z \quad (8)$$

が成り立つか—調べる．もしこれが成り立てば，A 君の座標系でも，A' 君の座標系でも方程式の形は同一となる．すなわち，対称である．

対称性を調べるために，座標の変換と力の変換の仕方を考えなくてはならない．まずは，座標の変換であるが，これは簡単である．図 1 から明らかに，これら 2 つの座標系は

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad z' = z \quad (9)$$

の関係がある．もう少し，分かり易く書くと

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (10)$$

となる．これから，ただちに式 (7) と式 (8) のそれぞれの左辺には，

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (11)$$

と言う関係があることがわかる．行列に書き直しているが，同じである．

残りは，座標が回転した場合，力の変化の様子を調べることにする．ただちに分かることは，A 君と A' 君が見る力の z 方向成分は，

$$F_z = F'_z \quad (12)$$

とまったく同一になる．z 軸を中心に回転を行うので，当たり前である．興味の対象は，xy 平面の力が，A 君と A' 君でどのように見えるか—である．便宜上，力  $\mathbf{F}$  を z 方向と xy 平面に投影した部分に分解する．

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\perp + F_z \mathbf{k} \quad (13)$$

ここで， $\mathbf{F}_\perp$  は xy 平面に投影した力， $F_z$  は力の z 方向成分， $\mathbf{k}$  は z 方向の単位ベクトルである．A 君の座標系では，

$$F_x = |\mathbf{F}_\perp| \cos \alpha \quad F_y = |\mathbf{F}_\perp| \sin \alpha \quad (14)$$

となる．一方，A' 君の座標系では，

$$\begin{aligned} F'_x &= |\mathbf{F}_\perp| \cos(\alpha - \theta) = |\mathbf{F}_\perp| (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) \\ F'_y &= |\mathbf{F}_\perp| \sin(\alpha - \theta) = |\mathbf{F}_\perp| (\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) \end{aligned} \quad (15)$$

となる．式 (14) と見比べると，これは

$$F'_x = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta \quad F'_y = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta \quad (16)$$

と書き直すことができる．式 (12) と式 (16) より，A 君と A' 君の力の成分の関係は，

$$\begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (17)$$

となることがわかる．

式 (7) と式 (8) のそれぞれの左辺のの加速度の変換の式は式 (11) に示している．それぞれの左辺，すなわち力の関係は，式 (17) のとおりである．これらの式 (11) や式 (17) は，座標変換にともなう加速度や力の変換仕方を表しているのである．これらの式から，座標の回転によって，加速度の成分—座標の成分—と力の成分が，同一の行列によって変換されることがわかる．同じ変換を受けるということである．ということは，式 (7) が成立すれば，式 (8) が成り立つと言っている．これらの式—ニュートンの運動方程式—の形は同一である．したがって，ニュートンの運動方程式は座標の回転に対して，対称である．これは，座標軸を勝手にとっても，ニュートンの運動方程式は成立すると言っている．これは，重要な事実である．

ここでは， $z$  軸を中心に回転させたが， $x$  軸でも  $y$  軸でも同じように対称となる． $x$  軸を中心に回転させて， $y$  軸を中心に回転させるように回転を 2 回施しても，同じように対称なるはずである．回転を 2 回施すことは，任意の方向を軸として，回転を 1 回施す作用と同じである．したがって，任意の方向を軸にして，回転させても，ニュートンの運動方程式は対称となる．ニュートンの運動方程式は，回転に対して，対称となっている．

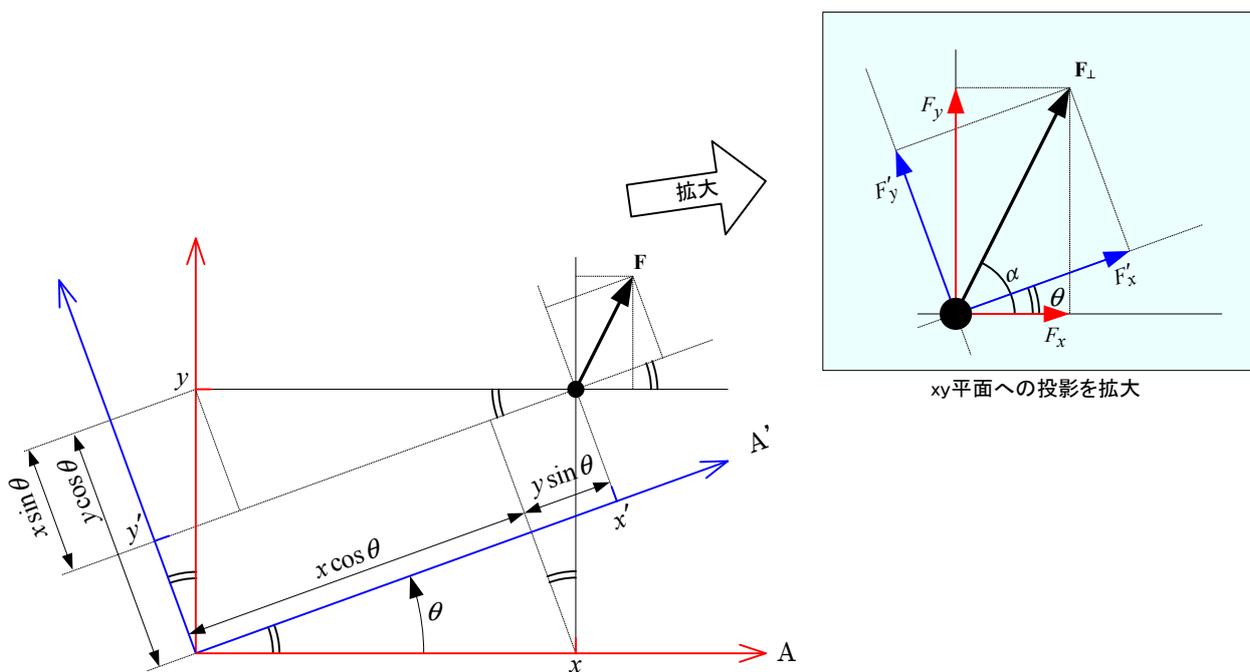


図 1: 座標軸の回転

## 1.4 ベクトル

物理学の基本法則は、座標の平行移動や回転に対して、その方程式の形は変わらない。すべての基本法則はそのように書かれているはずである。何度も言うようだが、これは、我々が住んでいる世界には特別な原点や軸がないことを表している。単純な例として、ニュートンの運動方程式が、そのようになっていることを先に示した。これから学習する電磁気学も、座標の平行移動や回転に対して、方程式の形は変わらない。

これまで、示してきた加速度や力は、ベクトルの例である。これは、ある空間に固定された一本の矢のように考えることができる。それは方向と大きさを持っている。それは、座標系に関係なく存在している。この幾何学的な形をもつ1本の矢がどのように変化するのか考えるのが物理学である。だからこそ、平行移動や回転に対して、方程式の形が変わらなかったのである。

実際に問題を解く場合、適当に座標の原点と軸を決めて、基本方程式を解くことになる。この場合、 $(x, y, z)$ のように3つの数値が必要となる。この3つの数値の組をひとつの記号  $r$  で表すことにする。これをベクトルと言う。また、回転と平行移動を施した別の座標系を使うと  $(x', y', z')$  のように異なる組の数値が必要となる。この場合も同じ、記号  $r$  を使う。座標系により、成分は異なるが同じ記号を使うことになる。許されるのは、

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (18)$$

がどちらの座標系を使っても、同じ式になるからである。

ベクトルの成分がどのような性質があるかは、最後に述べる。

## 2 ベクトルの基本

### 2.1 ベクトルとは

長さや面積、あるいは質量、温度、時間、エネルギーなどは、大きさだけを持っている量である。これらの量は単位を決めれば、それらの何倍かという数値だけで完全に表現できる。これらの量をスカラー量と呼ぶ。

それに対して、変位や速度、加速度、力、運動量などは大きさだけでは表すことができない。大きさに加えて、その方向を示して、はじめて完全に表現できる。このように大きさと方向を持つ量をベクトル量という。位置ベクトルというものも、原点を決めてそこからの変位を表している。位置を表す量もベクトルである。

ベクトル量は便宜的に、一本の矢で表すことができる。矢の長さがその大きさを示し、先端の向きで方向を表す。例えば、図2の  $A$  のようにである。ベクトルの大きさは  $|A|$  と表現して、図では矢の長さで示す。通常絶対値と言うものは、原点からの距離を示す(複素数の場合でも)ので、ここで同じ記号が用いられるのももっともである。当然、これはスカラー量である。ベクトルをその大きさを割った量は、ベクトルで  $A/|A|$  と表現され、これは大きさが1の単位ベクトルとなる。単位ベクトルの大きさが1になることは、各自確かめよ。また、大きさがゼロのベクトルも存在して、それはゼロベクトルと呼ばれ  $0$  と書かれる。

一般にベクトル量は  $A$  のようにボールド書体で、スカラー量は  $A$  のようにノーマル書体で書かれる。今後、この授業ではこのように表現してする。

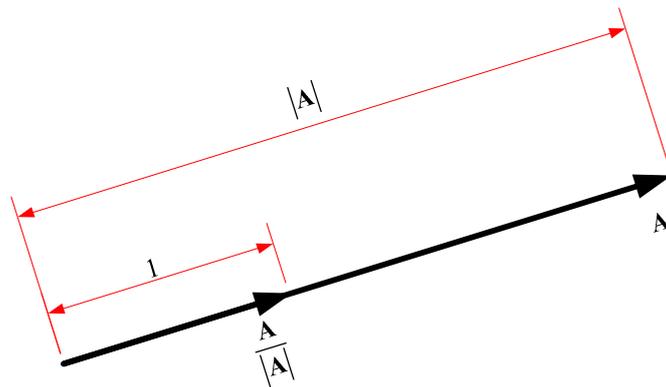


図 2: 矢で表現したベクトル

### 3 ベクトル同士の加算

ベクトルとスカラーの加算はできないし、全く意味がない。それは、速度と温度を加算しようとしているようなものである。スカラー量同士の加算は、今更言うまでもないであろう。

ベクトルの加算は単純で、2つの矢をつなぎ合わせれば良い。たとえば、

$$C = A + B \tag{19}$$

の場合、図 3 のようになる。同様にして、 $B + A$  も計算でき、図 4 に示すように  $A + B$  と等しいことが分かる。

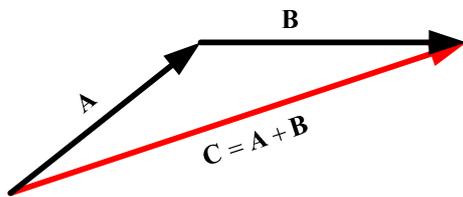


図 3:  $C = A + B$

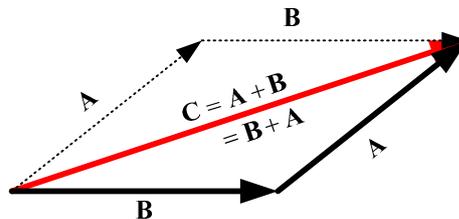


図 4:  $C = B + A$

### 4 ベクトルとスカラーの乗算

ベクトルとスカラーの乗算も簡単である。スカラー量が正の場合は、方向を変えないでベクトルの大きさ（これはスカラー）をそのスカラー量倍すればよい（図 5）。もし、かけるスカラー量が負の場合は、ベクトルの方向が逆になる。これは、ベクトルを-1倍すると、その方向が逆になることを示している（図 6）。ちょうど普通の数（スカラー）を-1倍すると、原点を中心に数直線上で逆になるのと同じである。

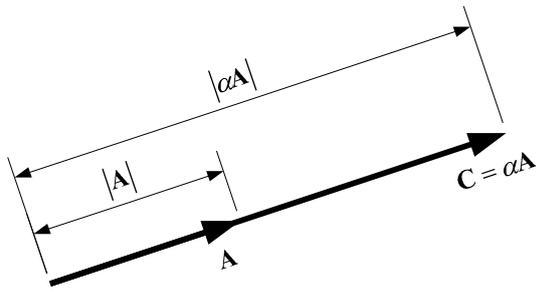


図 5:  $C = \alpha A$

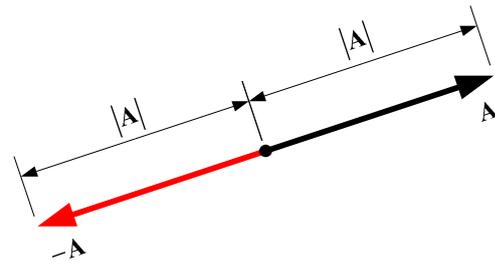


図 6:  $C = -A$

ベクトルの-1倍が決められたので、ベクトルの引き算の演算も可能となる。たとえば、

$$C = A - B \tag{20}$$

は、ベクトル  $A$  とベクトル  $-B$  の加算と考えるのである。これは、図 3 のようになる。

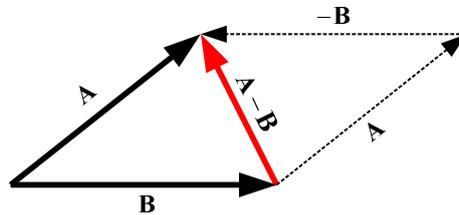


図 7:  $C = A - B$

## 5 ベクトルの別の表現

### 5.1 成分を用いた表現

これまでの話で、ベクトルは矢で表されることが分かった。矢で表すと直感的に分かり易いが、計算には不向きである。そこで、別の表現を考えることにする。図 8 のようにその矢の始まりをカーチアン<sup>1</sup>座標系の原点において、先端の座標で表すことができる。そうすると、位置ベクトル  $r$  の場合、

$$r_1 = (x_1, y_1, z_1) \tag{21}$$

のような表現が可能であろう。この  $x_1, y_2, z_3$  をベクトル  $r$  の成分、あるいは射影と言う。我々は 3 次元 (相対論では 4 次元) の世界に住んでいるので、物理学で取り扱うベクトル量は 3 つの成分からなる。

<sup>1</sup>Cartisian:デカルト (Descartes)(学説, 説) の

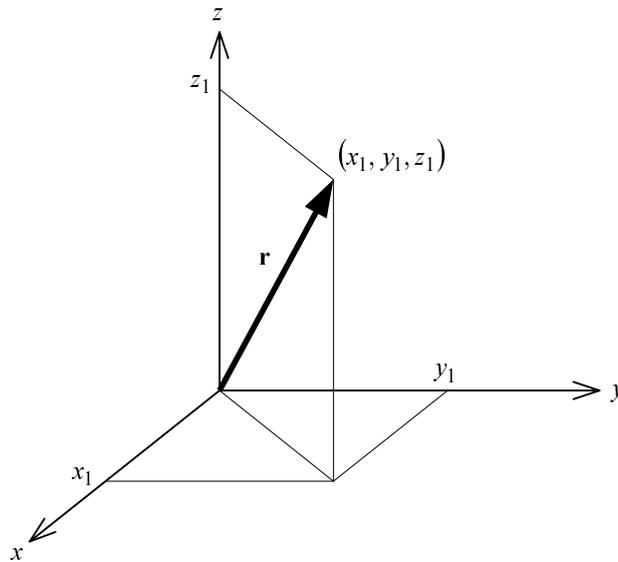


図 8: カートesian座標系をつかったベクトルの表現

このようにすると、ベクトルの表現は全く便利になる。今までの矢を用いた方法だと、ベクトル量の計算が大変やっかいである。計算するとなると数値で表すことになるが、長さや角度みたいな量で表すことになる。2つのベクトル量をそれぞれ長さや角度の数値

$$A = (r_A, \theta_A) \tag{22}$$

$$B = (r_B, \theta_B) \tag{23}$$

で表現したとする<sup>2</sup>。これを加算することを考えると、かなり面倒である。

$$\begin{aligned} C &= A + B \\ &= (\text{長さの表現複雑}, \text{角度の表現複雑}) \end{aligned} \tag{24}$$

一方、座長を用いた表現だと

$$\begin{aligned} C &= A + B \\ &= (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) \end{aligned} \tag{25}$$

$$= (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \tag{26}$$

のように簡単に演算ができる。成分同士を加算すれば良いのである。これは、まったくもって便利である!!!!。

ここで、先ほどのカーテシアン座標の各軸に沿った単位ベクトルを導入すると、便利な場合がある。図9のようにすると、

$$\begin{aligned} A &= (A_x, A_y, A_z) \\ &= A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \end{aligned} \tag{27}$$

<sup>2</sup>3次元なので2つの角度が必要であるが、一つで代表させる。どうせ、計算しないのだから...

のように表現できる．ここで， $i, j, k$  が各軸に沿った単位ベクトルである．

成分を使った表現では，ベクトルの大きさも簡単に計算でき，ピタゴラスの定理より

$$|\mathbf{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (28)$$

となる．

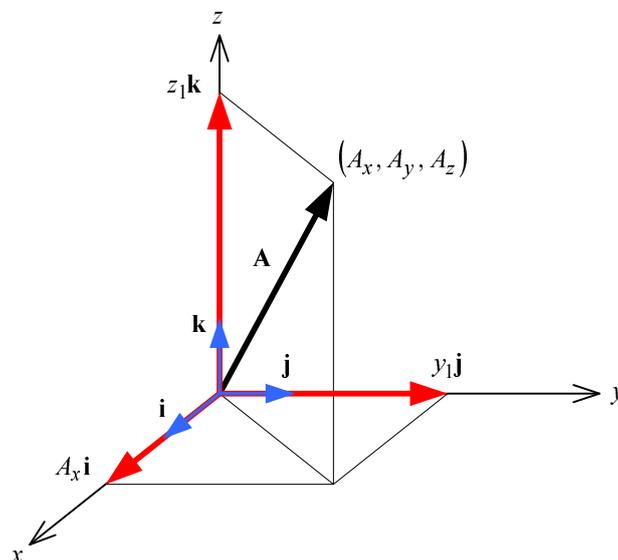


図 9: 単位ベクトル

## 5.2 方向余弦について

後に，方向余弦と言う話も出てくるので，少し説明をしておく．図 8 に示したように成分を使って，ベクトルは表現可能である．ベクトルの大きさを  $r$  として，各軸との角度をそれぞれ図 10 のようにすると，

$$r_x = r \cos \alpha \quad r_y = r \cos \beta \quad r_z = r \cos \gamma \quad (29)$$

の関係がある．ここで， $r$  はベクトル  $r$  の大きさを表す．これらの  $r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma$  を方向余弦と言う．

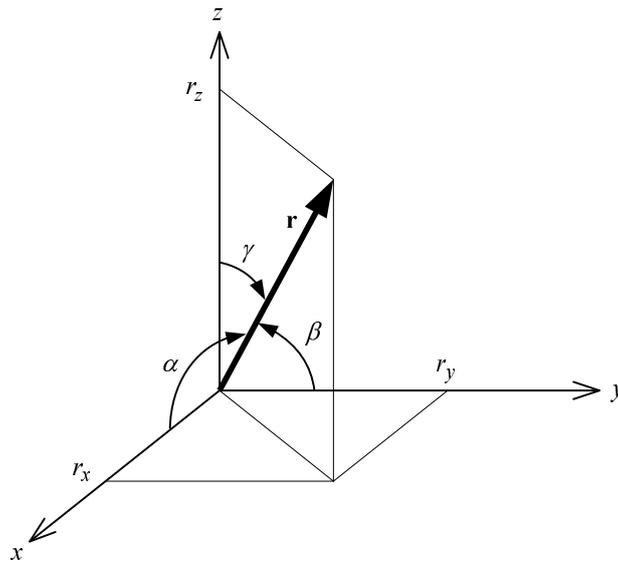


図 10: 方向余弦

## 6 座標の回転とベクトル

物理の少し済んだ問題を考えるようになると、大きさと方向を持つ量をベクトルと定義できなくなる。例えば非当方的な物質に力を加えた場合の歪みを表す弾性定数などである。この辺の話は長くなるので行わないが、頭の中に入れておいて欲しい。

先に示したように、ベクトルは成分で表すことができる。3次元空間であれば、 $x$ 方向と $y$ 方向と $z$ 方向の成分のようにである。最初に述べたように、空間には特別な軸というものはなく、等方的である。従って、ベクトルで表される自然現象は軸の選び方によって、変化してはならない。ベクトルの成分は軸の選び方によって変わってしまうが、ベクトルそのものは変わってはならない。そのためには、軸を変えた場合、それに応じてベクトルの成分が変わらなくてはならない。要するに、軸を変えても変化しない量がベクトルなのである！「方向と大きさを持つ量」よりも、「軸を変えても変化しない量」とする方がベクトルの定義としてふさわしい。それでは、軸を変えても変化しない量とはどのようにして分かるのだろうか？。これは、「軸を変えた場合、ベクトルの成分はどのように変化する必要がある」と言い換えることができる。

空間に浮かんでいる矢がベクトルと想像して欲しい。その矢の成分が軸を変えるとどうなるか考える。軸の変えると言うことは

- 軸の平行移動
- 軸の回転

に場合分けできる。軸の平行移動の場合、ベクトルの成分が変わらないのは明らかであろう。軸とベクトルとの角度は変化しないので、軸への射影である成分は変化しない。軸を平行移動させたら、位置ベクトルは変わるように思える。はじめに述べたように、位置ベクトルというのは、原点からの変位を表すもので、

それを変えるため、成分の値が変わる。しかし、変位の原点を変えないで、座標軸を平行移動させた場合、その成分の値は変わらない。変位の原点と座標の原点を混同してはいけない。

一方、座標の回転に対してベクトルの成分の振る舞いは、座標変換を考えればよい。3次元の計算と図示は大変なので、2次元で考えることにする。例えば、図 11 のような変位ベクトルを考える。成分は、当然座標軸への射影であることを忘れてはならない。 $x - y$  座標から  $x' - y'$  座標へ回転させる。座標軸を回転させても、ベクトルは変化しない。図の矢が変わっていないので、そうである。ただし、ベクトルの成分は変化する。この成分の変化は、

$$\begin{pmatrix} r'_x \\ r'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \quad (30)$$

と変換される。座標の回転に対して、ベクトルの成分はこの式と同じように変換されなくてはならない。ベクトルの成分は、座標系の回転ではその一つの点の座標と同じ変換となるのである。これを、新たなベクトルの定義して用いることにする。

これは、一つの物理的な法則がベクトルの方程式で表せたとすると、その式の関係は座標系を回転させても変わらないことを意味している。もっとはっきり言うならば、その法則は、座標系に依存していないと言えるのである。だからこそ、ベクトルを用いた表現は有用なのである。そう、物理におけるベクトル量は単なる幾何学の対象である。

ベクトルを矢で書くと、座標の変換によって、それが変わらないことは分かるが、計算は面倒である。一方、成分で表すと、計算は簡単であるが、座標変換による成分の変化をよく見ないといけない。ベクトルだと思っているものが、ベクトルでない場合があるのである。

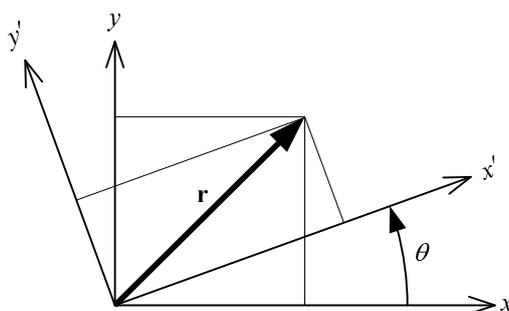


図 11: 座標の回転

## 7 課題

- [問 1] 正三角形はどのような対称性があるか
- [問 2] 円柱はどのような対称性があるか
- [問 3] 球はどのような対称性があるか
- [問 4] 運動方程式が  $m \frac{d^2 r}{dt^2} = F$  の場合、平行移動に対して対称である。実際とは異なるが、平行移動に対して対称でない運動方程式を作ってみよ。

[問 5] 2つのベクトル

$$A = (1, 2, 3)$$

$$B = (3, 2, 1)$$

の  $A + B$  と  $A - B$  を示せ .

[問 6] 前問のベクトル  $A$  と  $B$  の大きさを示せ .

[問 7] 2つの位置ベクトル  $A = \overrightarrow{OA}$ ,  $B = \overrightarrow{OB}$  の終点  $A$  と  $B$  の間を  $m : n$  の比に分ける点  $P$  の位置ベクトルを  $X = \overrightarrow{OP}$  とすれば ,

$$X = \frac{nA + mB}{m + n}$$

であることを示せ .

[問 8] 三角形  $ABC$  の重心を  $G$  とし , 点  $A, B, C, G$  の位置ベクトルをそれぞれ ,  $A = \overrightarrow{OA}$ ,  $B = \overrightarrow{OB}$ ,  $C = \overrightarrow{OC}$ ,  $G = \overrightarrow{OG}$  とすれば ,

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

であることを示せ .

[問 9] 3つの互いに垂直な平面鏡からなる反射鏡 (コーナーキューブ) がある . この反射鏡に入った光線 (3つの反射鏡で反射される) は , 入射方向と平行な方向にでていくことを示せ . これは , 自転車の反射板の原理である . アポロ宇宙船が月面にコーナーキューブを置いて , 地球からのレーザー光を反射させたこともあった . これにより地球との距離を計った . (ヒント: 入射光線をベクトルの成分で表現する . そして , 反射鏡はカーテシアン座標系の  $xy$ ,  $yz$ ,  $zx$  平面にあるとする .)

## 8 付録

### 8.1 いろいろなスカラー倍

あるとき , 息子にマイナスとマイナスを掛けたら , なぜプラスになるのか? と聞かれた . 私は , 数直線を使って以下のように説明した .

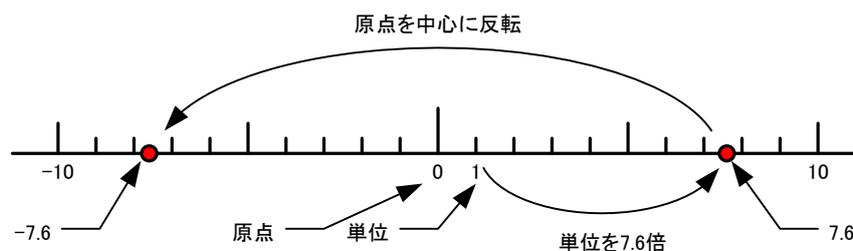


図 12: 数直線

同じようなことを複素平面上で考える．すると，虚数  $i$  の意味がよくわる．

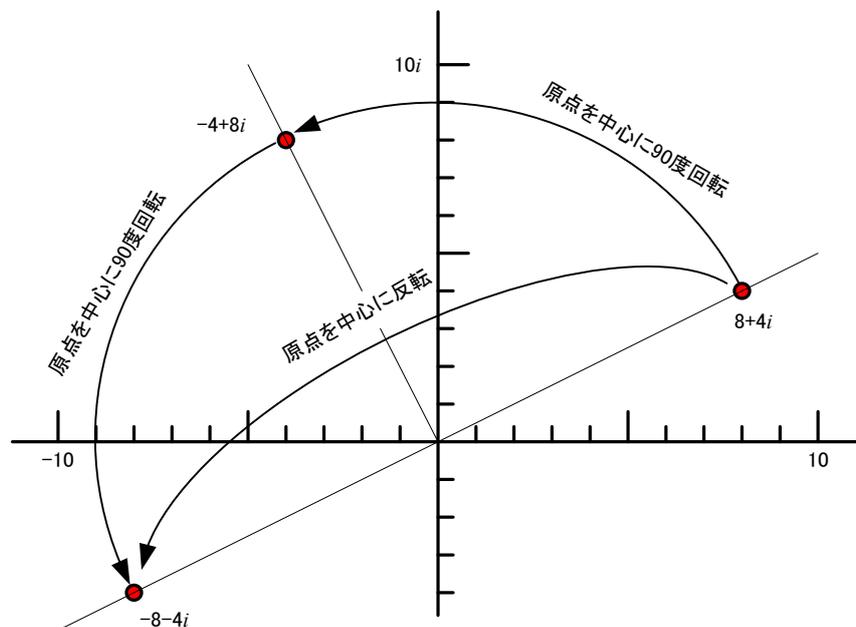


図 13: 複素平面

## 参考文献

- [1] Richard P. Feynman. 力学. ファインマン物理学 1. 岩波書店, 1977.