

電磁波の放射

山本昌志*

2006年9月14日

概要

諸君がいつもお世話になっている電磁波の放射は、マクスウェルの方程式から導くことができる。ここでは、マクスウェルの方程式から電磁波の放射が説明できることを示す。

1 本日の授業内容

マクスウェルの方程式から導かれる最も重要な結論である電磁波の放射について述べる。

2 電磁波の放射

電磁波の放射の話の前に少し準備が必要である。ここでは、まずグリーン関数の概要を述べる。

2.1 球面波

前回の講義でソース s がある場合の波動方程式

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -s \quad (1)$$

のグリーン関数

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2)$$

を導いた。計算は面倒であったが結果、直感的に理解できるものであった。このグリーン関数は図1のようなもので位置 \mathbf{r}' 、時刻 $t = t'$ のときにソース s が一瞬現れるとイメージする。観測点は場所 \mathbf{r} 時刻 t で、そこで観測する波がグリーン関数 $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ となる。式2に含まれる δ 関数は $t = t' + r + |\mathbf{r}'|/c$ のときに値がある。これ以外の時刻はゼロとなっており、まさにその時に波が到着するのである。これは、ソースと観測点の距離 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ を光速 c で波が伝搬するので当たり前である。

また、式2の分母の部分は、波の振幅が距離に反比例することを表している。先週、述べたように、これはエネルギー保存則からの類推と一致している。

* 国立秋田工業高等専門学校 生産システム工学専攻

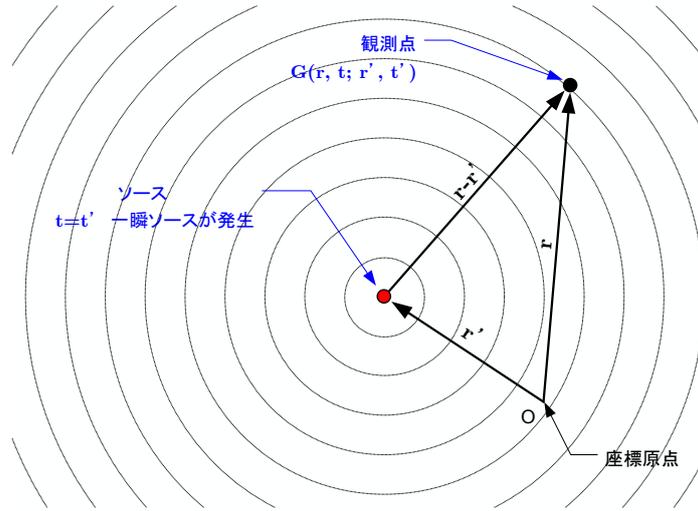


図 1: ソースがある場合のグリーン関数のイメージ．位置 r' ，時刻 $t = t'$ のときにソース s が一瞬現れれ，波は速度 c で拡散する．観測点の場所がグリーン関数である．

グリーン関数があったので，偏微分方程式 (1) の解は

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dV' G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') s(\mathbf{r}', t') \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dV' \frac{s(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{3}
 \end{aligned}$$

と書ける． dV' は r' における体積積分である．これが，ソースのある微分方程式 (1) の解である．この結果も当たり前のこと数式で示している．時刻 t で r の位置で観測される波は，そこから $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 離れた位置で時刻 $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ のソースが寄与するのである．これらを全部足し合わせれば観測点の波になる．寄与の仕方はエネルギー保存則が成り立つように，距離に反比例する．

2.2 マクスウェルの方程式の解

以前の講義で示したようにマクスウェルの方程式は，ベクトルポテンシャル ϕ とスカラーポテンシャル \mathbf{A} を用いて，

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{5}$$

と記述することができる．電荷密度 ρ がスカラーポテンシャルのソース，電流 \mathbf{A} がベクトルポテンシャルのソースになっている．これらの方程式は，式 1 と同じ形をしている．したがって，解も式 (3) と同じ形にな

る．すなわち，次のような具合にである．

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (6)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (7)$$

見事に，ソースがある場合のマクスウェルの方程式が解けた．

もちろん，電磁ポテンシャルは独立に存在しているのでは無く，ローレンツ条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

で結ばれている．このローレンツ条件は，電荷の保存則を満たしていれば，自動的に満足する．式 (6) と (7) を式 (8) に放りこんで，これが成立する条件を探せば良い．分からなければ，文献 [1] を読め．電荷保存則が満足すればローレンツ条件を自動的に満足することは重要である．電荷保存則を満足するようにソースを決めるだけでよく，後でローレンツ条件を計算しなくても良いのである．

電磁ポテンシャルから，電場や磁場は，

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (10)$$

と計算できる．これでマクスウェルの方程式の全てが解けたことになる．今まで学習してきたマクスウェルの方程式といわれる微分方程式が完全に解けたのである．後は必要な積分と微分を行えば，いかなる場合の電磁場の計算が可能なのである．

電磁場を記述する方程式と完全な解

電磁場を以下の式で完全に記述ができる．

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

この方程式の完全な解は，次のとおりである．

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

3 電磁波の放射の実際

式 (6) や (7) の積分の計算ができるような単純な問題で，実際の電磁場の放射を求めてみよう．実際には，ソースの条件を決めて，式 (6) と (7) の積分を行い，式 (9) と式 (10) の微分を行い電磁場を求めることに

なる .

3.1 電気双極近似

プリントが間に合わなかったので , 教科書を使って説明する .

3.2 荷電粒子の放射する電磁波

プリントが間に合わなかったので , 教科書を使って説明する .

参考文献

[1] 砂川重信. 理論電磁気学 第 3 版. 紀伊國屋書店, 2004.

[2] J. D. Jackson. ジャクソン 電磁気学 (下). (株) 吉岡書店, 原書第 3 版, 2002.