

電磁気学の基本法則

山本昌志*

2006年7月13日

概要

マクスウェルの方程式を示し，エネルギーの関係を導く．さらに電磁ポテンシャルを導入して，マクスウェルの方程式を波動方程式に書き直す．

1 本日の授業内容

本日は，マクスウェルの方程式とエネルギー保存則，さらに電磁ポテンシャルについて説明する．ここで学習するマクスウェルの方程式は電磁気学の全てが含まれている．通常，電磁気学を生業としている者はこの式から何でも導くことができる．要するにこれだけを憶えておけばよいのである．これには，今まで学習した全てが含まれているし，それ以上のもの（電磁波）があることが後の学習で分かる．

一方，エネルギー保存則は力学でおなじみのものである．電磁気学でもエネルギー保存則は成り立つ．力学や電磁気学のみならず，いままで発見されたいかなる現象でもエネルギー保存則は成り立っているのである．諸君がいろいろなことを考える場合，エネルギー保存則が成り立たないような現象や式が現れたら，何かの間違っていると確信しなくてはならない．それほど，エネルギー保存則は確固たる法則である．

マクスウェルの方程式は，複雑な連立偏微分方程式となっている．電磁ポテンシャルを導入することにより，単純な方程式に書き直すことができる．方程式が単純だと，さらに進んだ問題を解くときに有利になる．ここでは，電磁ポテンシャルを導入して，マクスウェルの方程式を書き直す．

2 マクスウェルの方程式

2.1 今まで学習してきたこと

これまで学習した電磁気学の方程式をまとめると，式(1)～(4)のようになる．これらの4組の方程式(左は積分形，右は微分形)をマクスウェルの方程式という．これは，電磁気学の全てが含まれており，ニュー

*国立秋田工業高等専門学校 生産システム工学専攻

トン力学とともに古典物理学の 2 本の柱となっている。

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (1)$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (4)$$

ただし、この方程式中の \mathbf{D} は電束密度、 \mathbf{B} は磁束密度、 \mathbf{E} は電場の強さ、 \mathbf{H} は磁場の強さを表す。また、 ρ は電荷密度、 \mathbf{j} は電流密度を表す。

この方程式の電束密度と電場の強さ、磁束密度と磁場の強さには、

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \qquad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad (6)$$

のような関係がある。この ε と μ は、物質の電磁気的な性質を表す量で、誘電率と透磁率と呼ばれている。一般に、真空中では ε_0 と μ_0 と書かれる。

さらに、実用上、有用な式としてオームの法則

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \qquad (7)$$

がある。これは、以前示したように電磁気学的な力と統計の法則から導かれるので基本法則とは言えないが、実用上極めて便利な式である。

これまでここで示した式は、電磁気的なものばかりである。諸君は、電磁気学の現象が力学の現象と関わりを持つことを知っているだろう。モーターを見よ。これは磁場の作用が軸を回しているのである。このようなことから、電磁気学と力学をつなぐ基礎的な式があることが推測できる。実際、それはローレンツ力と言われるもので、

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (8)$$

と書かれる。力が分かれば、後はニュートンの運動方程式¹

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (9)$$

を使えば、全てのことは分かる。ここで、 \mathbf{p} は運動量である。後のことは力学で学習したとおりである。

2.2 古典物理学のすべて

「ファインマン物理学 III 電磁気学」には、1905 年まで知られている物理学の基本法則は、表 1 が全てであると書かれている²。

¹ $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ を使わないで運動量を使ったのは、相対論を満足させるためである。

² ファインマンの教科書の表では電荷保存則が書かれているが、マクスウェルの方程式から導くことが出来るので、ここでは除いた。さらに、万有引力の法則も記述方法を変えた。

表 1: 古典物理

マクスウェルの方程式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && (\text{閉局面を通る電束}) = (\text{内部の電荷})/\epsilon \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (\text{ループをめぐり } E \text{ の線積分}) = -\frac{d}{dt}(\text{ループを通る } B \text{ の流速}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (\text{閉局面を通る } B \text{ 流速}) = 0 \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && c^2(\text{ループをめぐり } B \text{ の線積分}) = (\text{ループを通る電流})/\epsilon_0 \\ &&& + \frac{d}{dt}(\text{ループを通る電束}) \end{aligned}$$

力の法則

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

運動の法則

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{ただし, } \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (\text{アインシュタインの修正によるニュートンの法則})$$

万有引力

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

マクスウェルの方程式は 1864 年に発表された。そして、1905 年にアインシュタイン特殊相対性理論を発表した。これにより、電磁気学と力学の矛盾が解決され、古典物理学が完成した。この特殊相対性理論ではマクスウェルの電磁気学はそのまま生き残り、ニュートンの力学が修正された。

3 エネルギー保存則

力学のエネルギー保存則はよく知られている。また、これまでの自然科学の学習の経験からエネルギー保存則はどのような場合でも成立することは分かっていると思う。ここでは、力学と電磁気学を含めた系でもそれが成立することを示す。

エネルギー保存則については、完全に教科書に沿って説明しよう。電磁場中での運動方程式も教科書に沿って

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{10}$$

とする。相対論的補正は加味されていないが、それを入れても同じ結果が得られる。

電磁場中に2つの電荷があったとする．それぞれの電荷量を q_1 と q_2 , 質量を m_1 と m_2 とする．それぞれの運動方程式は，

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = q_1 \mathbf{E} + q_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B} \quad (11)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = q_2 \mathbf{E} + q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B} \quad (12)$$

となる．このての方程式を積分するときは，両辺に \mathbf{v} の内積を乗じるのが常套手段である．そうすると，

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] \quad (13)$$

となる．本当にそうなるかは， $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ に注意して，右辺を微分してみれば分かる．したがって，先の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right] &= q_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{E} + q_1 \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}) \\ &= q_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right] &= q_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{E} + q_2 \mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}) \\ &= q_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (15)$$

となる．ここでは， \mathbf{v} と $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は直交することを利用した．この式は，磁場 \mathbf{B} は電荷にエネルギーを与えることが出来ないと言っている．左辺の括弧内は運動エネルギー T を表している．両辺を積分すると， $dT = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ となり，運動エネルギーの変化は電場と変位の内積となる．運動エネルギーに磁場は全く寄与しないのである．それならば，発電機はどうなっているのか? という疑問が湧くであろう．これについては，前回の授業で述べたはずである．ここでは，運動エネルギーについてのみ述べたが，ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）を含めても同じことが言える．

系全体の運動エネルギーの変化と電磁場の関係が見るために，先ほどの2つの運動方程式を足しあわせよう．この操作をするときに，荷電粒子は大きさを持つものとし，その電荷密度を ρ とする．したがって，電流密度は $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ となるので，これを考慮すると，

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right] = \int_V (\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2) \cdot \mathbf{E} dV \quad (16)$$

となる．当然，積分領域は考えている系全体である．

次に，マクスウェルの方程式の式(4)を使う．すると，

$$\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (17)$$

となる．教科書には，この式の右辺は2粒子の作る場と書いてあるが，それは場の一部にすぎない．この式は，右辺のように電磁場を微分するとそれは電流密度になると言っているだけである．その電磁場は当然，2粒子が作るものも含まれるが，ほかの理由により存在する電磁場も含む．この式を使うと，2粒子の運動エネルギーに関する式は

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right] = \int_V \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} dV \quad (18)$$

となる．この式の左辺は運動エネルギーに，いっぽう右辺は電磁場に関するものである．だんだんと，力学的なエネルギーと電磁場のエネルギーの関係に近づいたことが実感出来るであろう．

さて，

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \quad (19)$$

のようなベクトル恒等式がある³．これを用いると，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right] &= \int_V \left[\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV \\ &= \int_V \left[\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \\ &= \int_V \left[-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \int_V \left[\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) \right] dV - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \frac{d}{dt} \int_V \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right] dV - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (20)$$

となる．左辺は粒子の運動エネルギーの変化を表している．右辺第一項は電磁場のエネルギーの変化である．第二項は，エネルギーの流れを表している．この辺の事情については後で述べることにする．この式は，

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) dV \right] + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (21)$$

と書き改めることができる．それぞれの項は，

$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$	粒子の運動エネルギー [Jule]
$\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$	磁場のエネルギー密度 [Jule/m ³]
$\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$	電場のエネルギー密度 [Jule/m ³]
$\mathbf{E} \times \mathbf{H}$	単位面積あたりのエネルギーの流れ [Watt/m ²]

を意味している．運動エネルギーについては，力学で学習したとおりである．電磁場のエネルギーに関しては静電場の話と同じである．最後の項のみここで追加されたことになる．エネルギー保存則を満足させるためには，最後の項はエネルギーの流れ [Watt/m²] となる必要がある． \mathbf{E} と \mathbf{H} の単位から考えるとエネルギー密度の流れになっている．本当にエネルギーの流れになっているかは，実験で確かめる必要がある．いろいろな実験の結果，この式がエネルギーの流れを表していることが確かめられているのである．このエネルギーの流れのベクトル

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (22)$$

は，発見者の名から，ポインティングベクトルと呼ばれている．

これらのエネルギーの関係は，図1のように表すことができる．

³成分に分けて計算すれば，証明は出来るであろう．教科書ではそうしている

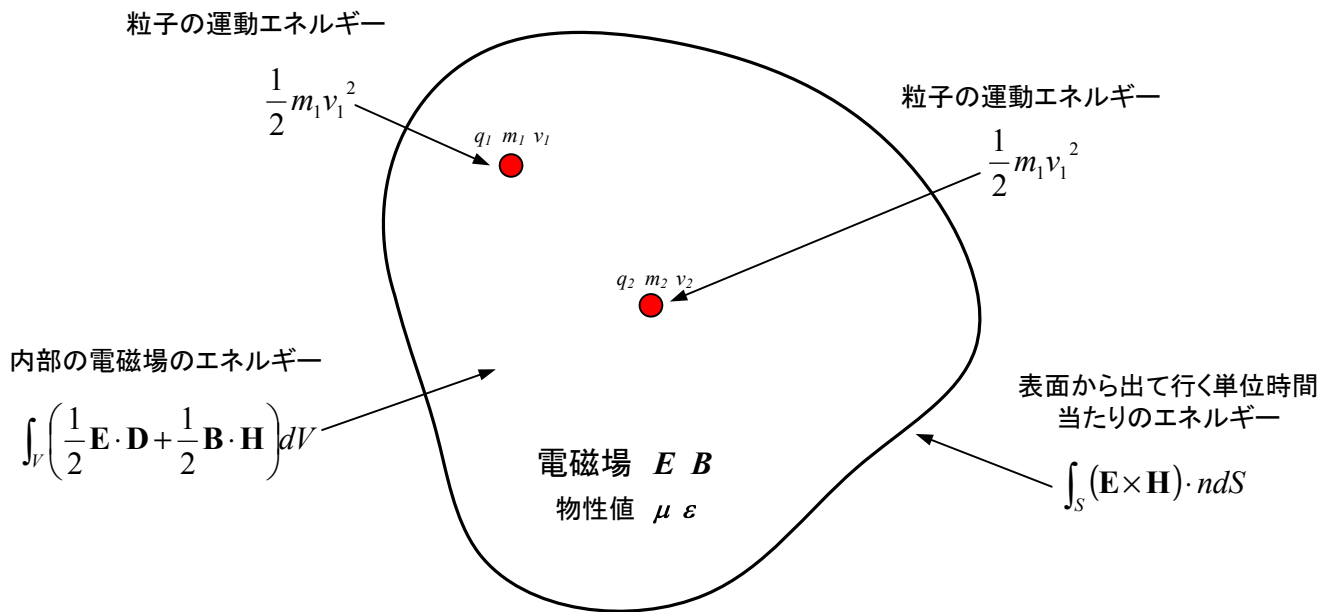


図 1: 電磁場と力学のエネルギーの関係

4 電磁ポテンシャル

実際にマクスウェルの方程式を解くとなるとかなりやっかいである。電場と磁場、そしてソース(源)としての電荷や電流が入り乱れている。そこで、電磁ポテンシャルというものが導入すれば、見通しの良い式に直すことができる。ただ、見通しの善し悪しは解くべき問題にかなり依存する。先の電場 E や磁場 B を用いた方がよい場合も、たくさんあることを忘れてはならない。ただ、電磁ポテンシャルを使うと式が美しいことは確かで、それはそれだけでもかなり意味があるだろう。

4.1 静電磁場のポテンシャル

静電場の学習で、スカラーポテンシャル ϕ を導入して、その勾配が電場を表すとした。すなわち、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (23)$$

である。これは、静電場の $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ を満たすように選んだと考えてもよい。一方、静磁場では $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の関係がある。したがって、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (24)$$

というようなベクトル場 \mathbf{A} が考えられる。このベクトル \mathbf{A} をベクトルポテンシャルと言う。これらのスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルには、名前の最後にポテンシャルがついている。エネルギーと関

係しているのである。それは、

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV \qquad U_M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV \qquad (25)$$

となる。 U_E は電荷がポテンシャルの中にあるとして、それが持つ全エネルギーである。この式は直感的に理解できるであろう。電圧と電荷量の積となっている。もうひとつの式は磁場の中に電流があるときにその電流が持つポテンシャルエネルギー U_M を示している。この証明は、諸君にまかせる。

ところで、式 (21) の

$$\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dV \qquad (26)$$

も電磁場のエネルギーを表している。これと、ポテンシャルを使ったエネルギーはどのように違うのだろうか？。考え方は異なるが、まったく同じ物理的な内容である。かたや場のエネルギーという考え方、もう一方は電荷や電流がポテンシャルエネルギーと持つと考えている。いずれの場合でも計算結果は同じである。

4.2 時間変動する場への拡張

静電場や静磁場のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは、先の説明で終わりである。ポテンシャルの考え方は何かと便利なので、時間的に変動する電磁場にも導入したい。そこで、静電磁場のポテンシャルを拡張することを考える。ベクトルポテンシャルは、静磁場の $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の関係式から導入した。これは時間的に変化する場合でも成り立つ—式 (2)—ので修正の必要はない。スカラーポテンシャルの方はまずい。 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ とすると、式 (3) の左辺が恒等的にゼロになってしまう⁴。そこで、式 (3) を

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad (27)$$

と左辺を移項して $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を使って

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \qquad (28)$$

と書き換える。すると、回転がゼロとなるべくとる場合は、あるスカラー場の勾配と書くことができる。あるスカラー場を ϕ とすると

$$-\nabla\phi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (29)$$

である。マイナスがつくのは習慣に過ぎない。したがって、電場は

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (30)$$

と表すことができる。

⁴ベクトル恒等式、勾配の回転はゼロである。 $\nabla \times \nabla\phi = 0$

これらのスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} を導入することで、マクスウェルの方程式を書き換える。 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ と $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ をつかい、さらに $\epsilon\mu = 1/c^2$ とすると、マクスウェルの方程式は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (31)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (33)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (34)$$

となる。これらの連立微分方程式は、元の方程式 (1)–(4) と同じくらい複雑である。10 個の式に 10 個の未知数が含まれる連立微分方程式となっている。こんなに複雑だとポテンシャルを導入したメリットはない。そこで、これらの式を変形して、変数分離形にすることを旨とする。具体的には、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルのそれぞれの微分方程式を導くのである。

まずは、式 (33) をベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルで書き換える。式 (33) に式 (32) を代入すると

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (35)$$

となり、整理すると

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (36)$$

である。

つぎに、式 (34) に式 (33) に式 (32) を代入する。すると、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (37)$$

となる。これをベクトル恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を使って

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (38)$$

のように書き直す。整理すると

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu \mathbf{j} \quad (39)$$

となる。

これで、マクスウェルの方程式は、式 (36) と (39) で表せたことになる。これでもまだ複雑で実際の計算に使う気にはなれない。もう少し簡単にできる。ベクトル場は、回転と発散により決めることができる—ということを使う。ベクトルポテンシャルの回転は、式 (31) により決められている。発散の方は特に制限がなく、勝手に決めることができる。そこで、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (40)$$

のように決める．これをローレンツゲージと言う．本当はこの辺は，もっと詳しく説明する必要があるが，かんべんしてほしい．取り合えずこのようにするのである．すると，

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} \quad (41)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (42)$$

となる．2つとも波動方程式で，ベクトルポテンシャルの源は電流で，スカラーポテンシャルの源は電荷となっている．それにしても，対称性がよく美しい式である．

マクスウェルの方程式 (1)–(4) の代わりに，これらの波動方程式 (41) と (42) を解けばよいのである．大幅に式は簡単になった．そして対称性も良いので計算が楽になることは明らかである．本講義の最後の章「電磁波の放射」でこの式の威力が分かるだろう．

5 課題

[問題 1] 教科書 p.110 の練習問題 (1)(2)(5)

6 付録

6.1 物質中の電磁場

物質中のマクスウェルの方程式を示す．この説明は，2年前の講義ノートである．この時の教科書 [1] とともに読むのが良いだろう．

6.1.1 電場と誘電体の作用

ガラスや水などの絶縁体は電気を流さない．そのため，最初は電気的な作用はないと考えられていた．しかし，並行平板中に絶縁体を出し入れすると，電圧が変化することにファラデーは気付いた．図2のような実験を行えば，それが分かる．(1) まずはじめに，電池で並行平板コンデンサーに充電する．(2) 電池を取り外し，電圧計を取り付ける．(3) 絶縁体をコンデンサーに入れて，電圧の変化を見る．その結果，驚いたことに，絶縁体を入れると，コンデンサーの両端の電圧は下がるのである．

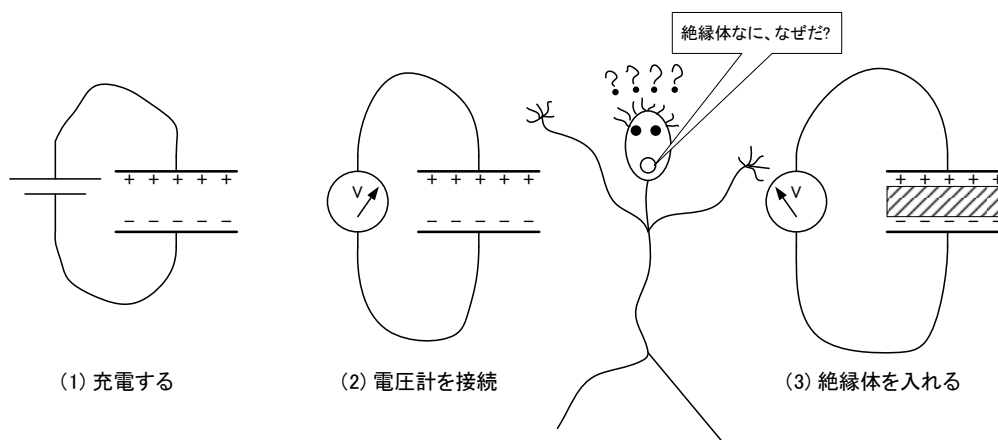


図 2: 絶縁体が電気的な作用を及ぼす実験．

なぜ，このようなことが起きるのだろうか？．絶縁体は電気双極子の集まりと考えると説明が付く．直流の電流は流れないが，なかには電気双極子がつまっているのである．このようなものを誘電体と言う．

原子に電場を加えると，分極が発生し，図3のように電気双極子 p として取り扱うことができる．物質中では，これが密度 N で存在するとして，それを考慮して分極ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= Nq\delta \\ &= N\mathbf{p} \end{aligned} \tag{43}$$

が定義できる．図からわかるように，ある表面積 S を通り抜ける総電荷量 Q は，

$$\begin{aligned} Q &= -SNq\delta \cos \theta \\ &= -S\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \tag{44}$$

である．ここで， n は表面の法線方向である．負号になる理由は，法線方向と分極ベクトルの定義を考えれば分かるはずである．これから，単位表面あたり通り抜ける電荷量は，

$$\sigma_p = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (45)$$

となる．この分極により，閉じた空間の電荷量は

$$\begin{aligned} \int \rho dV &= \int \sigma dS \\ &= - \int \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad \text{ガウスの定理より} \\ &= - \int \nabla \cdot \mathbf{P} dV \end{aligned} \quad (46)$$

となる．この積分は任意の領域で成り立つため，

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (47)$$

を導くことができる．

次に，この分極ベクトルが作る電流であるが，これは式 (45) から，直ちに導くことができる．

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (48)$$

これを分極電流と言う．これで，分極ベクトルによる電荷と電流を導くことができたので，誘電体中の Maxwell の方程式を書き直す準備ができた．

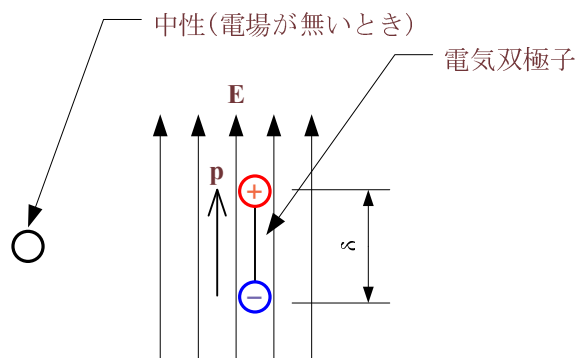


図 3: 原子が分極する様子

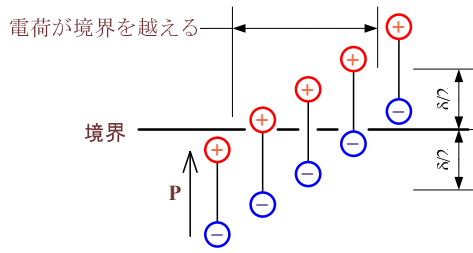


図 4: 境界を越えての電荷の移動 (境界と分極ベクトルが平行)

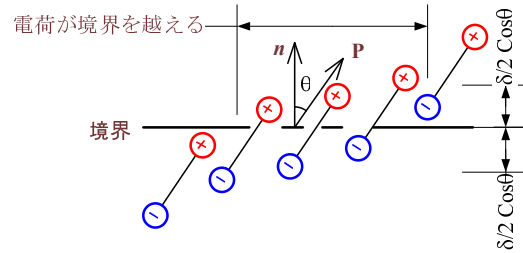


図 5: 境界を越えての電荷の移動 (境界と分極ベクトルが角度を持つ)

6.1.2 磁場と磁性体の作用

原子に電場を加えると、分極により、分極電荷が発生したような状況が磁性体中でも起きる。磁性体中では、もっとも複雑なことが起きているが、ここでは、物質中のマクスウェルの方程式を書き改めるための概論にとどめる。

誘電体中で電荷が発生したように、磁性体中では電流が発生する。この電流の起源は、述べないが、次のような性質がある。

- 非常に小さい閉じた電流のループから成り立っている。

電流は、閉じたループの集まりなので、

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0 \quad (49)$$

となる。閉じているので、湧き出しや吸い込みがないからである。これから、

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (50)$$

と書ける。この \mathbf{M} を磁化と言う。分極電荷は、電荷と電流を作ったが、磁化は電流は作るが電荷は作らない。

6.1.3 物質中の Maxwell の方程式

ミクロ的な立場で見ると、Maxwell の方程式は、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

である。電磁場については、これが全てで、これを解けば全て分かる。分極による電場も、分極電荷から生じると考えれば、この式で十分である。分極電流もこれに含むことができる。磁化分極の電流も含めることができる。

しかし、分極電荷が問題となるような微小領域まで考えて、電磁場を計算するのは、いかにも大変である。そこで、マクロ的な立場から、Maxwell の方程式を書き直す。追加するのは、

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (52)$$

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (53)$$

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (54)$$

である。これに加えて、実電荷(真電荷)による電流と電荷密度がある。これは一般には、 ρ と \mathbf{j} と書かれる。ミクロ的な立場の Maxwell の方程式 (51) の ρ と \mathbf{j} には、電気分極や磁気分極の電荷密度や電流が含まれるが、以降のマクロ的な立場では、それらは実電荷のみが担う。

マクロ的な立場で、電気分極や磁気分極による電荷や電流を区別して書いた Maxwell の方程式は、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (55)$$

となる。これは、式 (51) の電荷密度や電流の項を、電気分極、磁気分極、実電荷によるものに分けたのである。これが、物質中でのマクロな Maxwell の方程式である。しかし、この式は複雑であり見通しがよくない。そこで、ミクロな式 (51) に似た式に変形することを考える。式 (55) を変形すると

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \quad (56)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (57)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (58)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j} + \frac{\partial (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t} \quad (59)$$

が得られる。ここで、新たに

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (60)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (61)$$

を定義する。この \mathbf{D} を電束密度 [C/m²]、 \mathbf{H} を磁界の強さ [A/m] と言う。これらを使うと、物質中の Maxwell

の方程式は，

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{62}$$

となる．このままでは，4つのベクトルが未知数であるため，通常は解けない．物質中では，

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}\tag{63}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}\tag{64}$$

という関係がある．この比例定数 ε を物質中の誘電率， μ を物質中の透磁率という．これは， P は E に比例する， M は H に比例することから，導くことができる．電場や磁場が弱いときには，比例するが，大きくなると比例しなくなる．そのため， ε や μ を定数として扱うのは近似に過ぎない．

そこで，式 (62) がいつでも成り立つためには， ε や μ を定数として取り扱わないようにすればよい．磁場や電場の強さの関数であるし，もはや実数として取り扱わない，スカラーではなく行列 (テンソル)，あるいはヒステリシスも考慮に入れ，取り扱う範囲を広げることができる．そのようにして， ε や μ は物質中の電磁気的な作用を記述している．

最後に，도체中の電磁場を計算する場合は，オームの法則を

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}\tag{65}$$

を加えればよい．この σ は，物質中の導電率である．

参考文献

- [1] 鹿児島誠一．電磁気学．パリティ物理学コース．丸善株式会社，1997．