

静磁場 (ビオ-サバールの法則と磁場による力)

山本昌志*

2006年6月29日

概要

ビオ-サバールの法則と静磁場に関する力について学習する。

1 本日の授業内容

本日は前回に引き続き、静磁場の話である。主な内容は、以下の通り。

- ビオ-サバールの法則
- 電流に働く力
- ローレンツの力

2 ビオ-サバールの法則

2.1 クーロンの法則とビオ-サバールの法則

静電場の場合、微小体積 ΔV が作る微小電場は、

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\Delta V}{r^2} \quad (1)$$

となった。これに対応する静磁場の式がビオ-サバールの法則である。電流 I が流れている微小区間 Δs が作る微小磁場 (磁束密度) は、

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta s \sin\theta}{r^2} \quad (2)$$

となる。図1にこれらの位置関係を示す。この微小磁場 ΔB は、ベクトルで、その大きさと方向は、

- 大きさは、式 (2) の示すとおりである。
- 観測点の位置ベクトル r と微小電流ベクトル $I\Delta s$ の両方に垂直な方向を向いている。

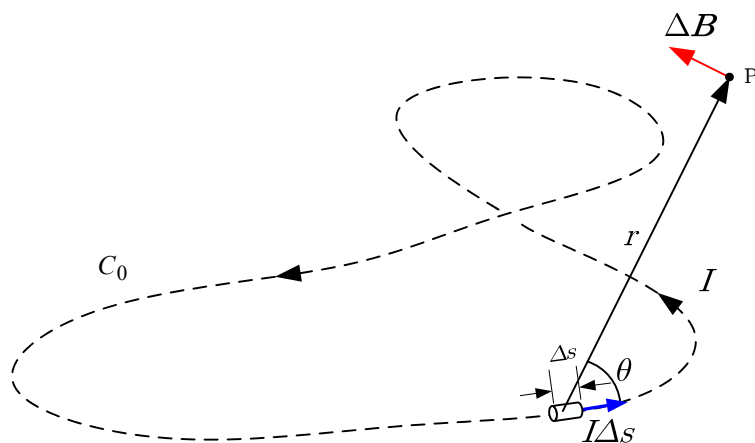


図 1: ビオ-サバルの法則

となっている。

ちょっとこれらの式は方向を指定することが不可能なので、それを含めた正確なベクトルで表現する。ベクトルを用いて表現すると、図など書かなくても式が全てを語っている。それぞれは、

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{dV\mathbf{r}}{r^3} \quad (3)$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (4)$$

となる。ただし、微少電流や微少電荷を座標原点に置いている。この後者をビオ-サバルの法則と言う。一般的なクーロンの法則とビオ-サバルの法則は、

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV \quad (5)$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV \quad (6)$$

となり、両者の対応が良い。こうなると、 j は電流密度ベクトル A/m^2 である。図 2 と 3 これらのクーロンの法則とビオ-サバルの法則が述べている内容を示す。

* 国立秋田工業高等専門学校 生産システム工学専攻

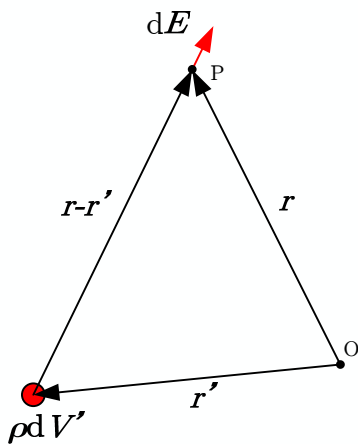


図 2: クーロンの法則 .

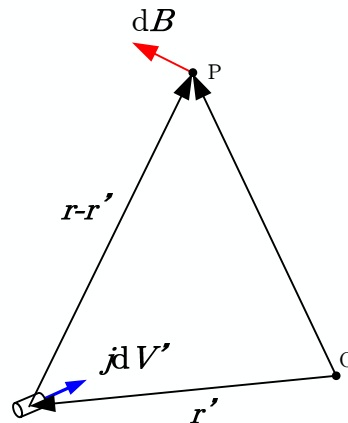


図 3: ビオ-サバールの法則 .

2.2 ビオ-サバールの法則について注意

式 (5) のクーロンの法則は物理的なイメージを思い浮かべることができる . そして , 実際にその物理的な状態—図 2—はある . それに対して , ビオ-サバールの法則が述べているような物理的な状態—図 3—は , 静磁場ではありえない . 電流が途中で途切れており , 電荷保存則を満足していない . ある電荷が運動している状態のスナップショットを考えれば , 図 3 の状態は可能である . そうした場合 , もはや静電場とは言えず , 式 (7) は成り立たない . 運動する電荷が作る電磁場は特殊相対性理論を使って導くことになる . この話は非常に面白いが , 講義の時間の都合で話せない .

ビオ-サバールの法則は静電場について述べているが , 実際にそのような物理的な状態は不可能である . そんな法則に意味があるのか?—という疑問が湧くだろう . ビオ-サバールの法則の積分形は物理的にありえる . そして , 式 (7) の積分形

$$B = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j \times r}{r^3} dV \quad (7)$$

は常に静磁場では正しいのである . 磁場を求めたければ , 全ての領域にわたって , 電流密度を積分すればよいのである .

理論を作る場合 , ビオ-サバールの法則の式 (7) から出発すると , すっきりする . 静電場と同じように straight forward に理論が展開できる . ここでの講義では実験事実からはじめたが , ジャクソンの電磁気学 [1] ではビオ-サバールから出発している .

2.3 ビオ-サバールの法則の導出

このビオ-サバールの法則は , 特殊相対性理論を用いて導くのが本来の姿と思われる—と昨年は説明した . それでも , ビオ-サバールの法則の完全な形を得るのは難しいかもしれない . 時間があるときにトライして

みよう...そこで、静磁場の知識のみですむ教科書と同じ説明をする。正直に言うと、このような説明方法があるとは知らなかった。さすが、砂川重信先生である。

今まで学習してきた磁場は、全て端が無い電流により作られる。すなわち、無限に長い電線や閉じた電線である。ビオサバールの法則を見ると、微小区間の電流を取り扱っているのだから、端が存在する。そのような電流を考えると、積分型のアンペールの法則が成り立たなくなる。これは、電流が保存されていないからである。

電流が保存された系で微小電流を考えるために、教科書では、微小電線の両端で発散と収束を考えている。このようにする限り、電流は保存され、積分型のアンペールの法則が成立する。また、これらの微小電流を足しあわせることにより、無限に長い電線や閉じた電線を考えることができる。砂川先生がこのようなことを考えた理由は、次のようなことからであろう。

- ビオ-サバールの法則が成り立つ、物理的な例を示したい。ただし、電流の保存則を満たさなくてはならない。そのためには、両端から電流が出入りするがそれらが磁場を作らなければ良い。電流が流れるが磁場を作らない。さあ、どうするか?。立体角 4π に等方に放射状に電流が流れれば良い。放射状の電流は磁場を作らない。

図4のような電流を考える。これについて、アンペールの法則を適用して、ビオ-サバールの法則を導く。

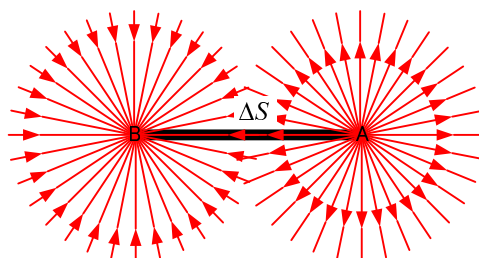


図 4: 電流保存則が成り立つ電流素

それでは、このような微小電流からビオ-サバールの法則が成立するか、調べることにする。教科書の図 5.9(a) に示している磁場 ΔB を求める。そのために、積分形のアンペールの法則

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot n dS \quad (8)$$

を使う。ある閉じた面の縁の磁場の線積分は、内部の電流密度の面積分に等しい。もっと簡単に言うと、磁場を線積分したら、その面を流れる電流に等しいと言っているのである。これを利用して磁場を求めようというのである。ビオ-サバールの法則を考えるために、積分を行う範囲は、教科書の通り、円の一部分を切り取った範囲が適当である。この部分では、電流は一定である。なぜならば、微小電線の端では、球状に電流が発散及び収束しており、この部分球の表面はその端から等距離にある。従って、ここでの電流密度は、

$$j = \frac{I}{4\pi r^2} \quad (9)$$

となる。また、対称性から、磁場の大きさも一定 ΔB となることは明らかである。

アンペールの法則，式 (8) を用いて磁場 ΔB を計算することになるが，この左辺は簡単に

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{B} \cdot d\ell &= \Delta B 2\pi R \\ &= 2\pi r \sin \theta \Delta B\end{aligned}\tag{10}$$

となる．

次に，式 (8) の右辺を考えることにする．この右辺は，積分領域の電流のを表している．ここでの，積分を行う部分の電流密度は一定で， $j = \frac{I}{4\pi r^2}$ と分かっている．したがって，積分領域の面積さえ分かれば，電流は計算でき，右辺の値が分かることになる．教科書の図 5.9(b) の帯状の微小区間の面積は，

$$\begin{aligned}dS &= r d\theta' \times 2\pi r \sin \theta' \\ &= 2\pi r^2 \sin \theta' d\theta'\end{aligned}\tag{11}$$

となる．従って全ての面積は，区間 $[0, \theta]$ で積分を行うことにより

$$\begin{aligned}S &= \int_0^\theta 2\pi r^2 \sin \theta' d\theta' \\ &= 2\pi r^2 \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' \\ &= 2\pi r^2 (1 - \cos \theta)\end{aligned}\tag{12}$$

と求められる．従って，微小電線の A から流出する電流の総量は，この面積に電流密度をかければ求められ，

$$\begin{aligned}j_A S_A &= 2\pi r^2 (1 - \cos \theta) \frac{I}{4\pi r^2} \\ &= \frac{I}{2} (1 - \cos \theta)\end{aligned}\tag{13}$$

となる．これは，距離に関係なく，角度のみに依存する．電流は保存され，球状に放出されるので当たり前のことである．

次に，同じ縁を持つ積分領域で教科書の図 5.9 の B 点から吸収される電流を計算する．先の A 点の放出電流の式が使える．異なるところは，角度のみである．したがって，B 点への吸収電流はとなる．

$$j_B S_B = \frac{I}{2} \{1 - \cos(\theta - \Delta\theta)\}\tag{14}$$

A 点の放出電流と，B 点の吸収電流をあわせたものがトータルの電流で，

$$\begin{aligned}j_A S_A - j_B S_B &= \frac{I}{2} (1 - \cos \theta) - \frac{I}{2} \{1 - \cos(\theta - \Delta\theta)\} \\ &= \frac{I}{2} \{\cos(\theta - \Delta\theta) - \cos \theta\} \\ &\quad \Delta\theta \text{ は小さいので，テイラー展開して 1 次の項まで取る} \\ &\simeq \frac{I}{2} \{\cos \theta + \sin \theta \cdot \Delta\theta - \cos \theta\} \\ &\simeq \frac{I}{2} \sin \theta \cdot \Delta\theta\end{aligned}\tag{15}$$

となる．したがって，円 C_0 上のアンペールの法則は

$$2\pi r \sin \theta \Delta B = \frac{\mu_0 I}{2} \sin \theta \cdot \Delta \theta \quad (16)$$

となる．したがって，微小磁場は

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \Delta \theta \quad (17)$$

となる．ビオ-サバルの法則まで，後一步である．そのためには， $\Delta \theta$ がじまなので，書き換えなくてはならない．今考えている微小電流とその周辺の幾何学的配置は，図 5 のようになる．正弦定理

$$\frac{\Delta S}{\sin \Delta \theta} = \frac{r}{\sin(\theta - \Delta \theta)} \quad (18)$$

から，

$$\sin \Delta \theta = \frac{\sin(\theta - \Delta \theta)}{r} \Delta S \quad (19)$$

が導かれる． $\Delta \theta$ と ΔS が微量としてテイラー展開し，1 次の項まで取ると，

$$\begin{aligned} \Delta \theta &\simeq \frac{\sin \theta - \cos \theta \cdot \Delta \theta}{r} \Delta S \\ &\simeq \frac{\sin \theta}{r} \Delta S \end{aligned} \quad (20)$$

となる．

式 (17) と (20) から，微小磁場は，

$$\begin{aligned} \Delta B &= \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r} \Delta S \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{I \Delta s \sin \theta}{r^2} \end{aligned} \quad (21)$$

となる．これがビオ-サバルの法則である．微小電流が作る微小磁場を表している．

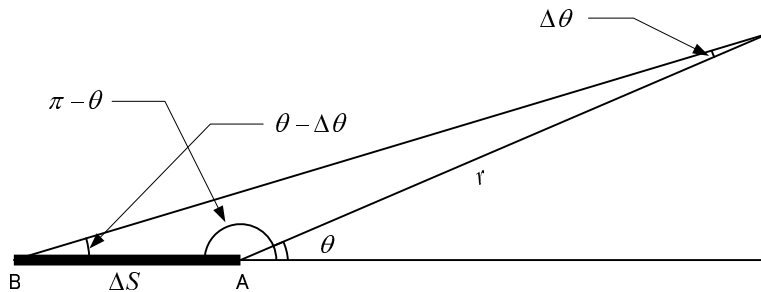


図 5: 微小電流とその位置関係

もっと一般的な座標で書くと，

$$\delta \mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(r') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta V \quad (22)$$

となる．ここで， r は観測点， r' は微小電流の位置を表すベクトルである．この関係を図 6 に示す．

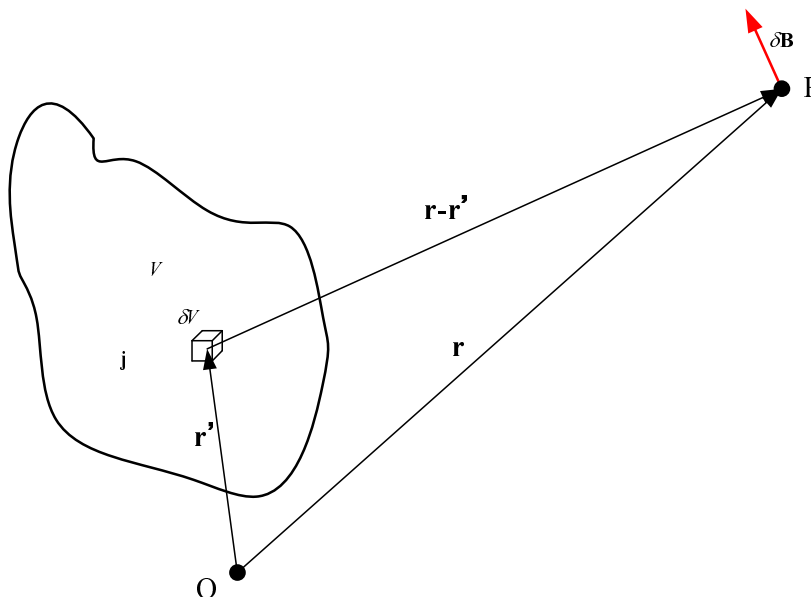


図 6: 微小電流とその位置関係

2.4 円電流が作る静磁場

問題のコイルの 1 個が軸上に作る磁場 B は，対称性により，軸上磁場は軸の方向に向いているはずである．その様子を図 7 の左の絵で示す．このコイルの小さい電流要素 δI が作る磁場は，ビオ-サバルの法則

$$\delta B = \frac{\mu_0 \delta I \times (r - r')}{4\pi |r - r'|^3} \quad (23)$$

から計算できる．これから，その磁場は図 7 の右の絵のようになる．軸上の磁場 B は，微小電流 δI がつくる微小磁場 δB をコイルの一周にわたって，足し合わせれば良い．

図から分かるように，微小磁場 δB は軸の垂直成分もある．しかし，これは，コイル 1 週にわたって足し合わせると，ゼロになる．コイル 1 週にわたって合計すると，残るのは軸上の成分のみである．コイルの

軸上の成分は，

$$\begin{aligned}
 \delta B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta \mathbf{I} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \hat{z} \\
 &\quad \hat{z} \text{ は，軸方向の単位ベクトル} \\
 &\quad \delta \mathbf{I} \text{ と } \mathbf{r} - \mathbf{r}' \text{ は直交している} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta I |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cos \alpha \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cos \alpha \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta I}{z^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a \delta I}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \tag{24}
 \end{aligned}$$

となる．これをコイルの全ての電流で積分することになるが， $\delta I = a \delta \theta I$ を利用すると計算が楽である．磁場は

$$\begin{aligned}
 B_z &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a^2 I d\theta}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 I}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \tag{25}
 \end{aligned}$$

となる．

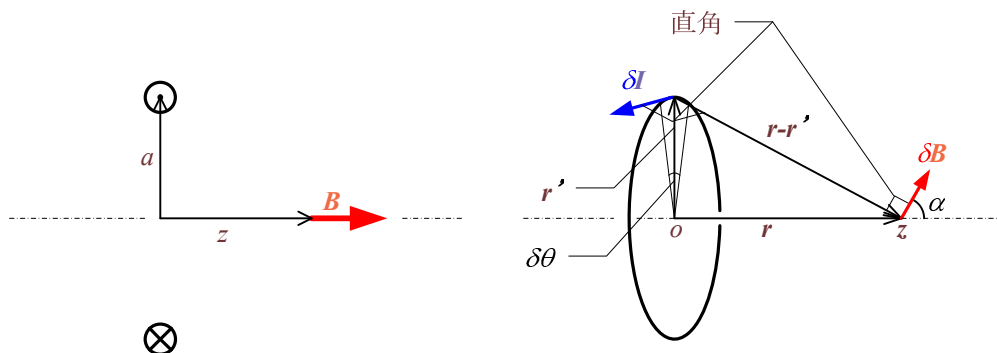


図 7: コイルが作る磁場

3 電流にはたらく力

3.1 直線電流に働く力

無限に長い直線電流どうしに働く力を考える．そのために，それが作る磁場を計算する．磁場は微分形のアンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{26}$$

から導くのが簡単である．この直線電流から， r 離れた場所で積分を行う．

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

左辺にストークスの定理を応用すると

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \mu I_2 \\ 2\pi r B_\theta &= \mu I_2 \end{aligned} \quad (27)$$

これから，磁束密度は

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \quad (28)$$

となる．この磁束密度は元々，力から定義されていた．図 8 のように置かれた電線が単位長さ当たり受ける力は，

$$\begin{aligned} F &= I_1 B \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} \end{aligned} \quad (29)$$

となる．静磁場の講義のはじめにこれを磁場の定義とした．実際には，これで電流を定義している．

式 (29) に示した力は平行に導線を張った場合に働く力である．それに対して，平行でない場合は，

$$\Delta F = I \Delta \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \quad (30)$$

となる．これをアンペールの力と言う．

3.2 長方形コイルに働く力

教科書の図 6.2 に書いてある通り，コイルの上下方向の力は，反対で一直線上にある．したがって，コイルの重心を移動させる力は発生しない．トルクはどうだろうか？．ゼロであることは直ちに理解できる．上下方向の力をそれぞれ， F と $-F$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

となる．直感の通り，ちゃんと計算してもコイルの上下方向の働くトルクは，キャンセルされる．

左右方向はどうだろうか？．力の大きさが反対なので，重心を移動させる力は発生しない．しかし，トルクは発生する．左右方向の力をそれぞれ， F と $-F$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_4 \times \mathbf{F} \\ &= (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \times \mathbf{F} \end{aligned} \quad (32)$$

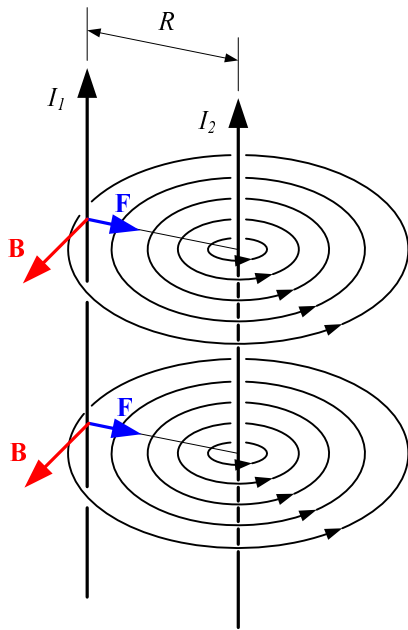


図 8: 2本の平行導線に働くアンペールの力

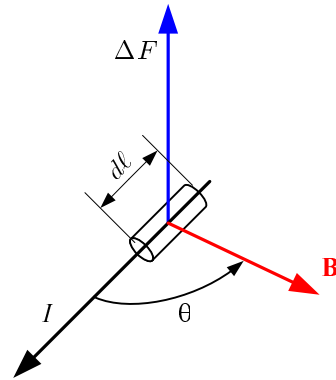


図 9: 電流要素に働くアンペールの力

となる．ここで， $(r_3 - r_4)$ は図の A から B へ向かうベクトルに等しい．したがってトルクの大きさは，

$$N = Fab \sin \theta \quad (33)$$

となる．方向は，コイルの左右の線と力との双方に垂直な方向である．また，力はアンペールの法則より， $F = IbB$ なので，トルクの大きさは，

$$\begin{aligned} N &= IBab \sin \theta \\ &= IB S \sin \theta \end{aligned} \quad (34)$$

となる．ここで， S はコイルの面積である．このトルクを表す式は，コイルが平面であればどんな形状のもので成り立つ．

4 ローレンツの力

4.1 荷電粒子に働く力

電場中の荷電粒子は，

$$F = qE \quad (35)$$

という力を受ける．これが電場の定義と考えて良い．次に考えるのは磁場中であるが，我々はアンペールの力の法則しか知らない．これから導くことにする．ある断面を dt の時間， dQ クーロンの電流の電荷が流

れる場合の電流は，

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (36)$$

となる．導線の中の電流を担う電荷の単位長さ当たりの密度を N とする．導線中で，電荷は一樣な速度 v で移動しているとすると， $dQ = Nqvdt$ となる．したがって，電流は，

$$I = Nqv \quad (37)$$

となる．この電流が流れている導線 (長さ ℓ) を磁場 B 中に入れると，

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} \\ &= Nqv \times \mathbf{B}d\ell \end{aligned} \quad (38)$$

という力をうける．この中に， $N\ell$ の粒子があるので，粒子一つ当たりの力は

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{Nqv \times \mathbf{B}d\ell}{Nd\ell} \\ &= qv \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (39)$$

となる．これが磁場中で，荷電粒子が受ける力を示す．電場と磁場の力を合わせて，

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (40)$$

となる．これが，電磁場中の荷電粒子が受ける力で，ローレンツ力と呼ばれる．

4.2 一樣な静磁場内の粒子の運動

一樣な磁場内での荷電粒子の運動を考える．ローレンツ力より，運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (41)$$

となる．力は磁場と速度の双方の直角方向に働いている．特に速度の直角方向に働いていることが重要である．速度の直角方向に力を受けるので，粒子は磁場からエネルギーを受けない．エネルギーは，力と移動方向の内積で，この場合

$$\begin{aligned} \Delta W &= \mathbf{F} \cdot \Delta\boldsymbol{\ell} \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\Delta t \\ &\quad \mathbf{F} \text{ と } \mathbf{v} \text{ は直交しているから} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

となる．従って，運動エネルギーは一定で，速度の大きさも変化しない．もう少し想像力を働かせると，荷電粒子は磁場に巻き付くようにらせんに運動することがわかる．ちゃんと計算したければ，円筒座標系を使って計算すれば，このことは直ちに分かるであろう．

次に、粒子の速度が磁場と垂直の場合を考える。この場合、らせんは進むことが無く、粒子は平面内を等速円運動する。円筒座標系の運動方程式は、

$$m \frac{v^2}{r} = evB \quad (43)$$

となる。速度 v は一定なので、回転半径は、

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (44)$$

となる。速度が大きくなれば回転半径は大きくなり、磁場を強くすれば回転半径は小さくなる。また、角速度は $v = r\omega$ から

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad (45)$$

となる。角速度は、粒子の速度に依存しないで一定の値となる。この ω をサイクロトロン角振動数と言う。

このように一様な磁場では、粒子の運動エネルギーに関係なく、一定の角速度で粒子は回転する。サイクロトロンと呼ばれる加速器は、この原理を利用している。粒子の回転周波数に応じた電場により加速して、高エネルギーの粒子を得る装置である。ただし、粒子のエネルギーが大きくなると、粒子の質量が大きくなり、回転周波数が変化する。そうすると加速ができなくなり、サイクロトロンの限界となる。

また、粒子が完全にいつも磁場と垂直の速度を持つことはあり得ない。ほんのちょっとした角度を持って、らせん運動が発生して、上下の磁極の衝突する。これを防ぐために、実際のサイクロトロンでは上下方向に安定な運動するようにしている。これは、完全に一様な磁場を用いるのではなく、少し変化させている。興味がある者は調べよ。

4.3 ローレンツ力のパラドックス

図 10 で示す 2 つの座標系での磁場による力を考える。 $x - y - z$ 座標系を A 座標系、 $x' - y' - z'$ 座標系を A' 座標系と呼ぶことにする。A 座標系から見ると、そこには一様な磁場 B と静止している電荷 q を持つ物体がある。この物体に加わるローレンツ力はゼロである。物体は速度がゼロなので、力は加わらない。一方、A 座標系に対して速度 v で移動している A' 座標系から、その物体を観測するとどうなるだろうか？ A' 座標系で観測すると、物体は速度 $-v$ で移動していることになる。もし、同じ磁場 B があるとすれば、物体は力を受けることになる。これは、矛盾である。

この矛盾を解決するためには、特殊相対性理論を使って説明する必要がある。ここでは、結論を述べるにとどめる。A' 座標系では、電場と磁場の両方が観測され、それぞれによる力の和はゼロとなる。従って、2 つの座標系での物体の運動は同一になる。

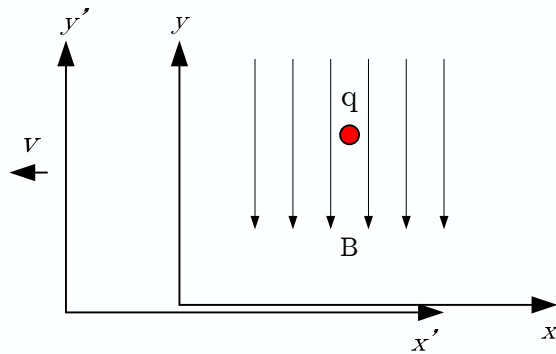


図 10: 2つの座標系での磁場による力

4.4 ローレンツ力と作用・反作用の法則

2個の質点がお互いに及ぼし合う力は、大きさが等しく、かつ方向が反対方向である。これを作用・反作用の法則という¹。この作用・反作用の法則が成り立つと、この系の運動量が保存される。この辺は力学の基礎なので、忘れた者は各自復習せよ。ここでは、ローレンツ力においても、作用と反作用の法則が成り立つか調べる。

図 11 のように 2 つの質点がお互いに作用を及ぼしあって、運動しているような状況を考える。明らかに電場による力は、作用反作用の法則を満たしている。一方、磁場の方はそんなに簡単ではない。一番手っ取り早いのは、作用・反作用の法則が成立しない例を示すことである。教科書の図 6.5 がその例になっている。

結論は電磁場の運動量も考慮に入れると、作用・反作用の法則は成り立っているのである。この辺を詳細に述べる時間はない。しかし、作用・反作用の法則はいつでも成り立っているのである。

¹質点が 2 個以上の場合には、力の合計がゼロになると言い換えればよい。

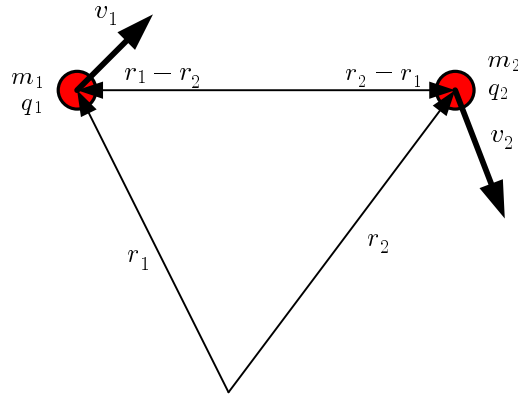


図 11: 電荷をもつ 2 個の質点の位置関係

5 磁荷に作用する力

5.1 閉電流と磁気双極子の等価性

磁荷 q_m が作る磁場は

$$B = \frac{1}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \quad (46)$$

となる． $\pm q_m$ の磁荷を微小距離 s だけ離れた磁気双極子の磁場を考える．図の z 軸上 ($\ell \ll z$) の磁場は，次のようになる．

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{q_m}{4\pi} \left[\frac{1}{(z - \ell/2)^2} - \frac{1}{(z + \ell/2)^2} \right] \\ &= \frac{q_m}{4\pi z^2} \left[\left(\frac{1}{1 - \ell/2z} \right)^2 - \left(\frac{1}{1 + \ell/2z} \right)^2 \right] \\ &\quad \left(\quad \right) \text{内を二項分解，すなわち無限級数の和に分解する} \\ &= \frac{q_m}{4\pi z^2} \left[\left\{ 1 + \frac{\ell}{2z} + \left(\frac{\ell}{2z} \right)^2 + \left(\frac{\ell}{2z} \right)^3 + \dots \right\}^2 - \left\{ 1 - \frac{\ell}{2z} + \left(\frac{\ell}{2z} \right)^2 - \left(\frac{\ell}{2z} \right)^3 + \dots \right\}^2 \right] \\ &\quad \text{二次以上の微小量を無視すると} \\ &\simeq \frac{q_m}{4\pi z^2} \left[\left(1 + \frac{\ell}{z} \right) - \left(1 - \frac{\ell}{z} \right) \right] \\ &\simeq \frac{2q_m \ell}{4\pi z^3} \quad (47) \end{aligned}$$

磁気双極子が作る磁場は，距離の 3 乗で小さくなる．単極子 (1 重極) は距離の 2 乗で，双極子 (2 重極子) は距離の 3 乗で小さくなる．

ここで、磁気双極子モーメント m を

$$m = q_m \ell \quad (48)$$

とする。この場合、 z 軸上の磁場は、

$$B_z = \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{z^3} \quad (49)$$

となる。

一方、半径 a の円電流が z 軸に作る磁場は、前回のビオ・サバルの法則を応用する問題で示したとおり、

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 I}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (50)$$

となる。先ほど同様に、コイルから離れた場合 ($a \ll z$) には、

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2 I}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \frac{1}{\{1 + (a/z)^2\}^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \frac{1}{\{1 + (a/z)^2\}^{3/2}} \\ &\quad \text{テイラー展開する} \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{15}{8} \left(\frac{a}{z}\right)^4 - \frac{35}{16} \left(\frac{a}{z}\right)^6 + \dots \right] \\ &\quad \text{二次以上の微量を無視すると} \\ &\simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \\ &\simeq \frac{1}{4\pi} \frac{2\mu_0 I \pi a^2}{z^3} \end{aligned} \quad (51)$$

となる。ここで、

$$m = \mu_0 I S \quad (52)$$

とすると、円電流と磁気双極子がつくる遠方の磁場は同一となる。ただし、 S はコイルの面積 (πa^2) である。

z 軸上の遠方では、円電流と磁気双極子のつくる磁場は同一となることが分かった。証明はしないが、 z 軸に限らずいかなる方向でも同じ磁場分布となる。このようなことから、実際の磁場は、磁荷が作るのではなく円電流が作ると考えることができる。原子の中の電子が回転することによる円電流が小さな磁場をつくるのである。原子が大量にあり、同じ方向に磁場を作れば、それらは重ね合わせられ、強力な磁場を発生する。これが磁石となる。

6 課題

[問題 1] 教科書 p.85 の練習問題 (1)

[問題 2] 教科書 p.85 の練習問題 (2)

[問題 2] の積分はやっかいである。分からない場合は、2005 年度の補講のテキストを見よ。

6.1 レポート 提出要領

提出方法は、次の通りとする。

| | |
|------|--|
| 期限 | 7月6日(木)AM8:45まで |
| 用紙 | A4 |
| 提出場所 | 山本研究室の入口のポスト, または講義開始時に手渡し |
| 表紙 | 表紙を1枚つけて, 以下の項目を分かりやすく記述すること。 授業科目名「電磁気学特論」 課題名「課題 静磁場(電流による力)」 生産システム工学専攻 学籍番号 氏名 提出日 |
| 内容 | 問題の解答。計算課程をきちんと書くこと。 |

参考文献

- [1] J. D. Jackson. ジャクソン 電磁気学 (上). (株) 吉岡書店, 原書第3版, 2002.