

静磁場

山本昌志*

2006年6月22日

概要

静磁場について学習する．直感的な方法で，静磁場が満たすべきベクトルの微分方程式をしめす．

1 本日の授業内容

本日は静磁場の話をする．電場と磁場の在り方はかなり異なるが，よく似た方法で取り扱い，その発散と回転を求めることが本日の主題である．本日の学習内容は以下の通りである．

- 磁荷とクーロンの法則
- 電流の磁気作用
- 磁場に関するガウスの法則
- 積分型のアンペールの法則
- 微分型のアンペールの法則

2 エルステッドの発見とアンペールの法則

2.1 磁石

磁石が鉄などの磁性体を引きつけることはよく知られている．諸君は，これまで学習してきた静電的な作用よりも，磁石による作用の方がおなじみかもしれない．磁石のN極とN極，あるいはS極とS極は反発し，N極とS極は引きつけあう．これは，静電場の時に学習したクーロンの法則の電荷の作用と似ている．磁荷の間に働く力を記述した磁荷におけるクーロンの法則と言うものがある．それは，N極の磁荷を正の値，S極の磁荷を負の値で表し¹，それらの間に働く力の大きさが

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m Q_m}{r^2} \quad (1)$$

*国立秋田工業高等専門学校 生産システム工学専攻

¹本当は，正負はどうでもよい

となることを示す．ここで， μ は真空の透磁率で，とりあえず比例定数と思って欲しい． q_m と Q_m は磁荷で単位は [Wb] である²．

このように電荷と磁荷はよく似ているが，決定的に異なることがある．電荷は単独で取り出すことができるが，磁荷は絶対に単独では存在しないのである³．このことは，図 1 で示すように，磁石を半分にしてやはり N 極と S 極があり，それを半分にしてもその断片にも両方の極が存在することからも分かる．N 極あるいは S 極のみの断片は作れないのである．それに対して，電荷の場合，図 2 のように帯電した棒を分割すると，正または負のみに帯電した断片を作ることができるのである．

電荷の場合と異なり単独の磁荷が存在しないと言うことは，式 (1) が成り立つ状況は自然には起きえないと言うことである．しかし，磁荷の考えが全く間違っているとも言えない場合がある．適当に，正負の磁荷が等量分布していると仮定すると，観測される磁場と同じものを計算上，作ることが可能である．これは計算のテクニック上で正しい磁場を作っているにすぎず，単独の磁荷はやはり存在しないことを忘れてはならない．このテクニックは磁石の磁場を考える場合使われることがある．

電荷のクーロンの法則を使うことは多いが，磁荷の式 (1) はほとんど使われない．少なくとも，私は一回も使ったことがない．したがって，諸君は磁荷のクーロンの法則は忘れて良い．

それならば，クーロンはこの磁荷の式 (1) をどのようにして発見したのであろうか? ．興味があるものは，実験方法について，調べよ．

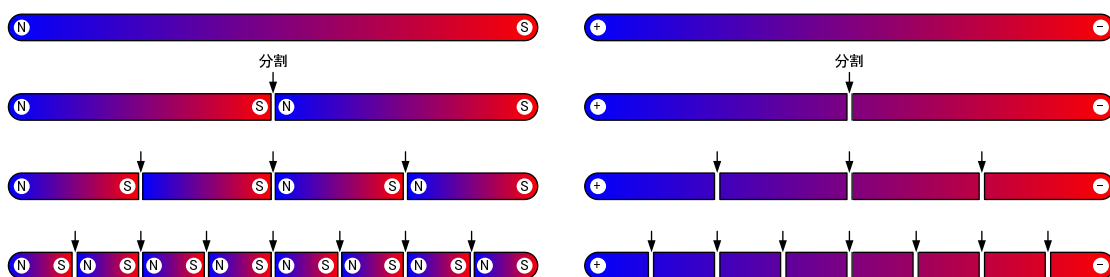


図 1: 磁石の分割．矢印で分割しても，断片には N と S の両極が存在する．

図 2: 帯電棒の分割．矢印で分割すると，正または負の単独電荷の断片ができる．

2.2 電流の磁気作用

2.2.1 電流が磁石に作用することの発見

最初に磁石による力，磁力を発見したのは誰かは分からないが，その解析的な研究の先鞭をつけたのは，コペンハーゲン大学のエルステッド教授 (Hans Christian Oersted, 1777-1851) であろう．彼は，1819 年から 1820 の冬に，電気学や磁気学の講義をしていた．当時，電流と電荷の間には何か関係があると考えていた人がいた．どちらも，触るとビリッとするからである．なんとも，頼りない理由ではあるが，そう考えたのは偉い．ただ，エルステッドの方は，少し変わっていて，電流と磁石になんらかの関係があると考えたようである．

²ウェーバと読む

³単独の磁荷は観測されていない

どのようにして、この考えに至ったかは分からないが、電流を流すと方位磁石は力を受けて、方向が変わると考えた。磁石は力を受けて、電流と同じ方向、あるいは反対の方向に向くと考えた。これはもっともなことである。電線に流れている電流が、磁石の北の先端が受ける力は、対称性から考えて、右や左であるわけがない。電流と同じ方向か、その反対である。そこで、学生の前で、図3のように、磁石と電線を配置して、スイッチを入れた。結果は、期待に反して、磁石は動かなかったのである。これは、磁石の方向と電流が作る磁場の方向が一致していたために動かなかったのである。ここで、電流を反対にすれば、磁石が180度回転して、それはドラマチックなことが起きたはずであるが、なぜかエルステットは、反対に電流を流していない。それにしても、1/2の確率でエルステットは運がなかった。

しばらく、自分の考えがうまくいかないことに、悶々としていたエルステットは、何を思ったか、あるいは実験を間違えたか、磁石と電線を同じ方向に向けて、電流を流した。そうすると、磁石が90度回ったのである。これには、エルステットも驚いたに違いない。対称性から考えて、どうしてもありえないことが起こったのである⁴。1820年の春のことである。エルステットはなかなか納得がいかなかったが、実験を繰り返し、その事実を認めた。そして、その発見について、その年の7月に報告書を書いた。

この報告書が他の研究所に届くや否や、多くの実験が行われ、新たな発見が相次いだ。

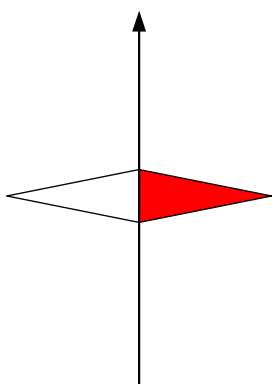


図 3: 東西に電線を張る

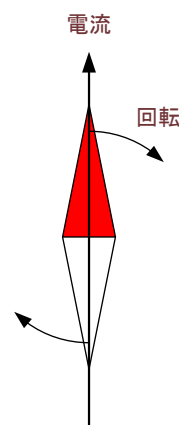


図 4: 電線を南北に張る

2.2.2 磁場

エルステットの実験結果が各地に伝わると、ビオ (Biot) とサバル (Savart)、そしてアンペール (Ampere) がより精密で完全な実験を行った。そして、2本の平行な導線間には力が働くことがわかった。長さ $d\ell$ の導線に加わる力 dF は、導線間の距離 R に反比例し、それぞれの電流 I_1 と I_2 の積に比例する。そして、力の方向は電流が同じ方向ならば引力で、反対ならば斥力となる。式で表すと

$$dF_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 d\ell}{R} \quad (2)$$

⁴この現象は、実際には対称性が破れてはいない

である⁵．ここで， μ は真空の透磁率と呼ばれるもので，今のところ比例定数と考えて欲しい．その値は， $4\pi \times 10^{-7}$ である．

この電流が流れる導体間に働く力について，近接作用の考えを取り入れることにしよう．電流は場を作り，その場からもう一方の導線に力が作用すると考える．この場を磁場 B_1 と言い，それをを用いると，式 (2) は，

$$dF_1 = I_1 d\ell \times B_1 \quad (3)$$

$$B_1 = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_2}{R} \quad (4)$$

となる．磁場 B_1 の単位は [T] と書き，テスラと読む．この 2 番目の式は，1 本の直線電流が作る磁場の大きさを示している．

この磁場については，導線の方向を変えたりして詳細に調べられて．その結果，1 本の直線電流が作る磁場は，

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I \times R}{R^2} \quad (5)$$

となることが分かった．これがビオとサバルが最初の実験によって発見した結果である．有名なジャクソンの電磁気学 [1] には，これをビオ-サバルの法則と書いている．普通は，付録に乗せている式 (23) をビオ-サバルの法則という．

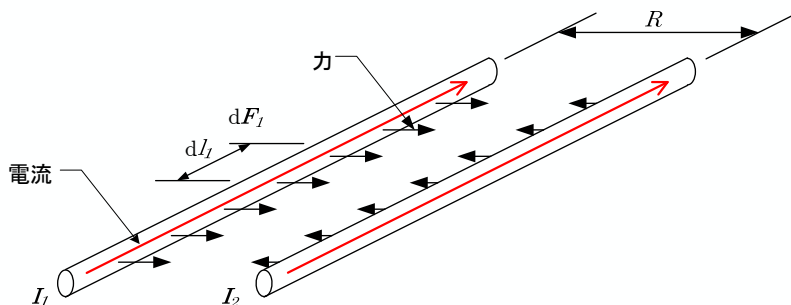


図 5: 電線間に働く引力

3 静磁場の基本法則

この辺をきちんとすると，かなりの数式を羅列する事になってしまう．そこで，ここでは教科書に沿って，直感的なイメージを大切に，説明する．

⁵実は，この式が電流を定義している．すなわち，1[m] 離れた 2 本の平行な導線に電流流し，単位長さあたり 2×10^{-7} [N] の力が働いたとき，その電流を 1[A] とする．

3.1 磁場に関するガウスの法則

定常電流の作る磁場を実験でいろいろ調べてみると、図6のようになっていることが分かった⁶。ちょうど、電流が流れる方向とねじの方向を一致させると、磁場の方向は右ねじの回転方向と一致する。これを右ねじの法則といい、電流と磁場の方向を示している。

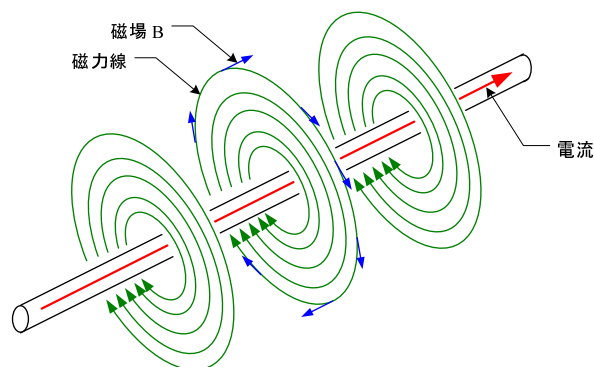


図 6: 磁場

1本の長い電線が作る磁場を考えよう。磁場は、電線の周りに回転としてできる。このような場合、どのような微小の体積を考えても、その発散はゼロである。要するに、どんな部分をとっても、入ってくる磁場のフラックスと出て行くフラックスは等しい。すなわち、

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (6)$$

である。これは、たとえ、電線を取り囲んだ体積を考えても、そうなる。この左辺は、ガウスの発散定理

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV \quad (7)$$

が成立する。したがって、

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (8)$$

である。これはいかなる領域でも成立するので、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9)$$

となる。磁場の発散はなく、必ず磁場は元に戻ることを言っている。

電場の場合は、電荷から電気力線が出ていて、どこか無限遠点に行くか、反対の電荷に吸収されていた。磁場の場合、磁力線は閉じた線である。このことは、電荷に相当する磁荷は無いと言っている。

⁶これは、式(5)を図に示していることになる。

3.2 積分形のアンペールの法則

前節の結果から，磁場の発散は分かった．磁場を決めるためには，回転を求める必要がある．そのために，図7のような経路で積分を行う．電流は無限に長い直線とする．この場合の磁場は，式(5)を使えばよい．半径 R での線積分は

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{R}}{R^2} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &\quad \mathbf{I} \times \mathbf{R} \text{ と } \boldsymbol{\ell} \text{ は同じ方向なので} \\ &= \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} d\ell \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} R d\theta \\ &= \mu_0 I \end{aligned} \tag{10}$$

となる．この結果は，磁場が直線電流からの距離の $1/R$ に比例することから，容易に予想できる結果である．重要なことは，直線電流からある距離離れた磁場の線積分は，距離に依存しないことである．

これは，ガウスの法則，点電荷の作る電場の面積分が，距離に依存しないのと同じである．この場合も，最初，球の中心に点電荷を置き，一般的に閉じた面で成り立つことを示した．同じことを，ここでも行う．次に，積分路を図8のように変形させると， $\delta\boldsymbol{\ell} = \delta t + \delta r + \delta z$ と書くことができる．磁場の方向，すなわち $\mathbf{I} \times \mathbf{R}$ の方向は， δt に平行で， δr と δz には垂直となる．したがって，積分は先ほどと同じで，

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{R}}{R^2} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} r d\theta \\ &= \mu_0 I \end{aligned} \tag{11}$$

となる．図9のように積分路を変更しても同じである．これまでの結果から，閉じた線路での積分はいつも同じ値になることが分かる．

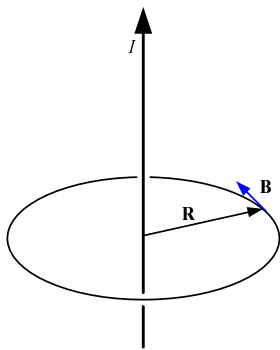


図 7: 積分範囲が円

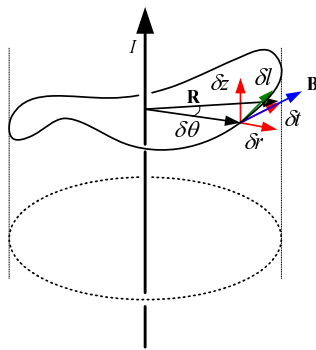


図 8: 同一円筒での積分

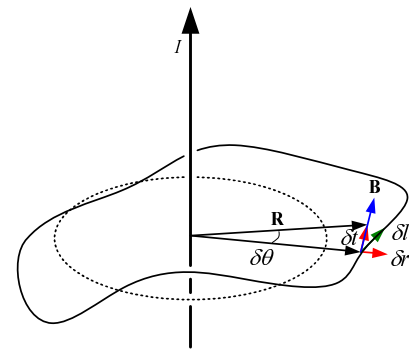


図 9: 同一面での積分

今までは、1本の直線電流であったが、磁場は重ねあわせができるので、複数本でも成り立つ。あるいは、電流がデルタ関数のように離散的ではなく、連続的な分布、密度 j として存在する場合も成り立つ。これらは、磁場が重ねあわせの原理が成り立つからである。さらに、証明はしなかったが電流が曲線であっても成立する。このことから、

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (12)$$

が成り立つ。これを積分形のアンペールの法則と言う。右辺は、線積分を囲む電流の総和になっていることに注意が必要である。

ところで、この積分の外側の電流の寄与はどのようなのであろうか？。外側の電流であろうとも、この積分路には磁場を発生させる。結論を先に言うと、

- 外側の電流による磁場はあるが、積分を行うとゼロになる。

である。このことは、電荷でやったのと同じことを行えばよい。図 12 の通りである。

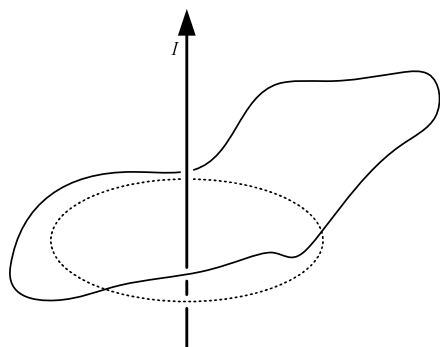


図 10: 任意の場合の積分路

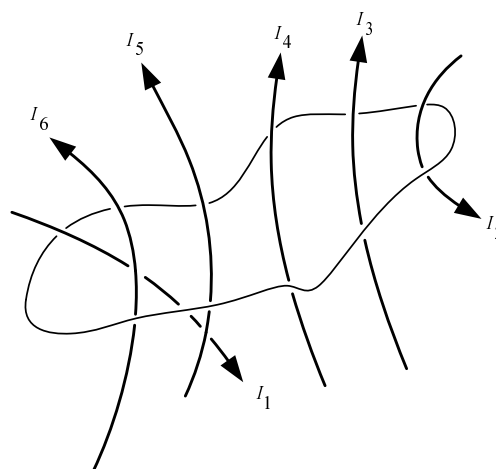


図 11: 複数の導線が積分路を貫く場合

3.3 微分形のアンペールの法則

諸君は、ストークスの定理を知っている。それを使うと、式 (12) の左辺は、

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (13)$$

となる。これから、積分形のアンペールの法則は、

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (14)$$

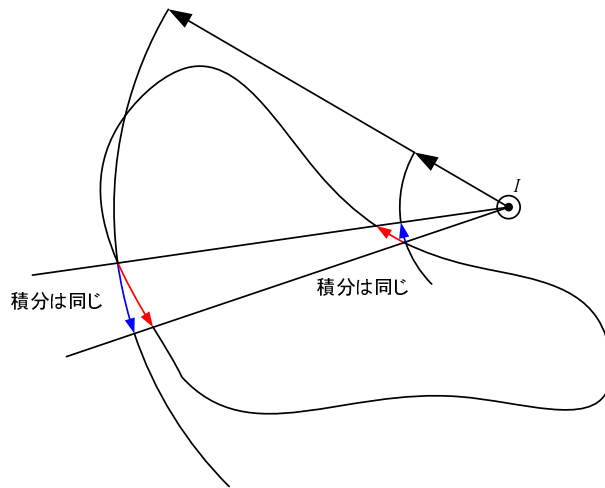


図 12: 積分路の外側に電流がある場合

と書き改められる．この式は，任意の面で成り立つ．そのためには，

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (15)$$

となる必要がある．これがアンペールの法則の微分形である．全てが場の量となっているので，理論的には扱いやすくなる．

このアンペールの法則の言っていることは，電流が磁場の回転を作っている．

4 本日のまとめ

- 電流は磁場を作り，それは右ねじと同じように考えることができる．右ねじの回転方向が，磁場の方向を表し，ねじの進む方向が電流を表す．
- 磁場の発散はゼロである．これは，磁荷が存在しないと言っている．

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- 磁場の回転を示すアンペールの法則は，

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

である．電流が磁場の回転を作ると言うことを言っている．これを積分形にしたければ，ストークスの定理を使う．

5 課題

[問題 1] 教科書 p.71 の練習問題 (1), (4), (5)

(1) と (4) は非常に簡単である．(5) の計算は大変である．分からない場合は，私の 2004 年度の講義ノート (<http://www.akita-nct.jp/yamamoto/lecture/2004/p1/14th/html/node1.html>) に答えが書いてある．

5.1 レポート 提出要領

提出方法は，次の通りとする．

期限	6月29日(木)PM8:45まで
用紙	A4
提出場所	山本研究室の入口のポスト，または講義開始時に手渡し
表紙	表紙を1枚つけて，以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電磁気学特論」 課題名「課題 静磁場」 生産システム工学専攻 学籍番号 氏名 提出日
内容	問題の解答．計算課程をきちんと書くこと．

6 付録 ビオ・サバールの法則

式 (5) は、無限に長い電流が作る磁場である。これが分かると、微小な長さ dz が作る磁場の式が欲しくなる。磁場は全ての電流を積分して得られる—となると理論を考えるのに大変都合が良い。図 13 のような状況を考える。図中の点 P の作る磁場は、式 5 から分かっている。この磁場は、 dz が作る磁場 dB を足しあわせたもの—積分—になるはずである。したがって、

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{R}}{R^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{I}, \mathbf{r}) dz \quad (16)$$

となる $f(\mathbf{I}, \mathbf{r})$ があるはずである。このように表すと、 dz が作る磁場 dB は

$$dB = f(\mathbf{I}, \mathbf{r}) dz \quad (17)$$

となる。ここまでくれば、 $f(\mathbf{I}, \mathbf{r})$ の関数形を求めること重要な問題となる。ビオとサバールはここまで考えて歴史に名前を残した。だれでもここまでたどり着ければ、関数形を見つけることはできるであろう。科学史に名前を残すためには、時代の最先端にたどり着くことが如何に大事か—がわかる。

dB がベクトルなので、 $f(\mathbf{I}, \mathbf{r})$ もベクトルになる必要がある。幸いなことに、磁場 B は電流 I と位置 r にも垂直である。そこで、微小磁場 dB は、ベクトル積 $\mathbf{I} \times \mathbf{r}$ に関係がある—と類推できる。また、遠距離 r が離れると、磁場が小さくなることも理解できるであろう。問題は距離の何乗で小さくなるか?—である。ここでは、距離の 2 乗としてみよう。間違っていれば、1 乗にしたり、3 乗にしてみても、正しい関数形を探せばよい。科学史に名前を残すことを考えると、これくらいの努力をしてもよいだろう。これまでの直感から、

$$dB = k \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} dz \quad (18)$$

とかける。比例定数の k は後から調整すればよい。

この式を地道に積分を行う。計算する積分は

$$\mathbf{B} = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} dz \quad (19)$$

である。ベクトルの積分となっており、通常はやっかいである。しかし、幸いなことに、 I と r はいつも同じ平面内にあり、 z の位置が変わってもベクトル積の向きは変化しない。したがって、スカラーの積分を行った後、方向を考えればよい。

$$\begin{aligned} B &= k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I r \sin \theta}{r^3} dz \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I \sin \theta}{r^2} dz \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{IR}{r^3} dz \\ &= kIR \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= kIR \left[\frac{z}{R^2 \sqrt{R^2 + z^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{2kI}{R} \end{aligned} \quad (20)$$

この結果と式 (5) を比べる . 先の述べたように方向は合っている . また , 係数 k を

$$k = \frac{\mu}{4\pi} \quad (21)$$

とすれば , 大きさも合う . したがって , 微小領域 dz がつくる微小磁場 $d\mathbf{B}$ は

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} dz \quad (22)$$

と考えても良い . 普通 , これをビオ-サバールの法則と言う . また , $I dz$ を $d\mathbf{I}$ として ,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{d\mathbf{I} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (23)$$

と書かれる場合もある .

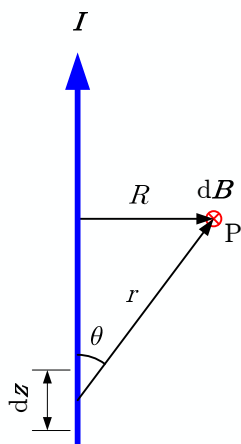


図 13: 無限直線電流と磁場

参考文献

- [1] J. D. Jackson. ジャクソン 電磁気学 (上). (株) 吉岡書店, 原書第 3 版, 2002.