

後期中間試験解答用紙 (5E 計算機応用)

電気工学科

学籍番号

氏名

1 常微分方程式の数値計算法

[問 1] 5点

微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(x)$ の近似解を求める 4 次のルンゲ・クッタ法の漸化式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, y_n) \\k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\x_{n+1} &= x_n + h \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

[問 2] 5点

```
x[0]=0.0;
y[0]=5.0;
```

[問 3] 10点

```
for(i=0; i < ncal; i++){
  k1=h*func(x[i],y[i]);
  k2=h*func(x[i]+h/2.0, y[i]+k1/2.0);
  k3=h*func(x[i]+h/2.0, y[i]+k2/2.0);
  k4=h*func(x[i]+h, y[i]+k3);

  x[i+1]=x[i]+h;
  y[i+1]=y[i]+1.0/6.0*(k1+2.0*k2+2.0*k3+k4);
}
```

[問 4] 5点

```
dydx=x*sin(x)-y*cos(x);
```

[問 5] 10点

高階の微分方程式を 1 階の連立微分方程式に変換するために, $y \rightarrow y_0, y' \rightarrow y_1$ と変数変換を行う. すると, $y'_0 = y_1$ となり, 元の微分方程式は,

$$\frac{dy_1}{dx} y_1 + x^2 y_1 y_0 + y_0 = 0 \quad (1)$$

となる. これらを整理すると, 以下の連立微分方程式が得られる.

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = -\frac{x^2 y_0 y_1 + y_0}{y_1} \end{cases} \quad (2)$$

2 連立一次方程式の数値計算法

2.1 ガウス・ジョルダン法

[問 1] 10点

以下の式で示す左の連立方程式の解を変えないように右の連立方程式に変形する方法である。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_N \end{bmatrix}$$

実際の手順は、

1. 処理する行の対角成分 a_{ij} を 1 にする。
2. 対角成分を 1 にした以外の行の j 列をゼロにする。

を 1 行から繰り返す。もちろん、解の形が変わらないように、非同次項も係数行列と同じ処理を施す。

[問 2] 20点

```
int ipv, i, j;
double inv_pivot, temp;

for(ipv=1 ; ipv <= n ; ipv++){

    /* ---- 対角成分=1(ピボット行の処理) ---- */
    inv_pivot = 1.0/a[ipv][ipv];
    for(j=1 ; j <= n ; j++){
        a[ipv][j] *= inv_pivot;
    }
    b[ipv] *= inv_pivot;

    /* ---- ピボット列=0(ピボット行以外の処理) ---- */
    for(i=1 ; i<=n ; i++){
        if(i != ipv){
            temp = a[i][ipv];
            for(j=1 ; j<=n ; j++){
                a[i][j] -= temp*a[ipv][j];
            }
            b[i] -= temp*b[ipv];
        }
    }
}
```

2.2 ガウス・ザイデル法

[問 1] 15点

反復法とは、連立方程式

$$Ax = b$$

の解 x を、求める方法の一つである。ここで、真の解を x とする。ある計算により n 回目で求められた近似解を $x^{(n)}$ とする。そして、計算回数を増やして、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x$$

になったとする。この様に計算回数を増やして、真の解に近づける方法を反復法という。

[問 2] 10点

連立方程式 $Ax = b$ の係数行列 A を $S - T$ と分解する。すると、漸化式

$$Sx^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b$$

が得られる。ここで、 $x^{(k)}$ は k 回目の反復計算で得られた近似解とする。もし、 k を大きくして、 $x^{(k)}$ がある値に収束したならば、それは元の連立方程式 $Ax = b$ の解になっている。もし、そうならば、

$$x^{(k+1)} = S^{-1}Tx^{(k)} + b$$

の計算を繰り返すことにより連立方程式の解が得られる。行列 A の対角成分を行列 S とすれば逆行列の計算が簡単である。これをヤコビ法と言う。具体的に成分で書き表すと、反復回数 $k + 1$ の時の解 $x_m^{(k+1)}$ は

$$x_m^{(k+1)} = a_{mm}^{-1} \left[b_m - \left(a_{m1}x_1^{(k)} + a_{m2}x_2^{(k)} + a_{m3}x_3^{(k)} + \cdots + a_{mm-1}x_{m-1}^{(k)} + a_{mm+1}x_{m+1}^{(k)} + \cdots + a_{mm}x_m^{(k)} \right) \right]$$

となる。この方法では、 $x^{(k+1)}$ の近似値は、すべてその前の値 $x^{(k)}$ を使っている。大きな行列を扱う場合、全ての $x^{(k+1)}$ と $x^{(k)}$ を記憶する必要があり、大きなメモリーが必要となり問題が生じる。そこで、 $x^{(k+1)}$ の各成分の計算が終わると、それを直ちに使うことが考えれば、メモリーは半分で済む。そのようにしたのがガウス・ザイデル法で、漸化式は次のようになる。

$$x_m^{(k+1)} = a_{mm}^{-1} \left[b_m - \left(a_{m1}x_1^{(k+1)} + a_{m2}x_2^{(k+1)} + a_{m3}x_3^{(k+1)} + \cdots + a_{mm-1}x_{m-1}^{(k+1)} + a_{mm+1}x_{m+1}^{(k)} + \cdots + a_{mm}x_m^{(k)} \right) \right]$$

[問 3] 10点

問題の式に前問のガウス・ザイデル法の漸化式を適用すると次のようになる。

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= \frac{1}{2} (2 - y^{(k)}) \\y^{(k+1)} &= \frac{1}{2} (2 - x^{(k+1)} - z^{(k)}) \\z^{(k+1)} &= \frac{1}{2} (2 - y^{(k+1)})\end{aligned}$$

－ 1 回目の反復計算

$(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を代入して $x^{(1)}$ を計算する。漸化式に代入すると、

$$x^{(1)} = 1$$

となる。つぎに、 $(1, 0, 0)$ を漸化式に代入して、 $y^{(1)}$ を計算する。すると、

$$y^{(1)} = \frac{1}{2}$$

が得られる。同様に、 $(1, 1/2, 0)$ を代入して

$$z^{(1)} = \frac{3}{4}$$

が得られる。したがって、第一回の反復の結果は、 $(x, y, z) = (1, 1/2, 3/4)$ となる。

－ 2 回目の反復計算

1 回目同様に行う。

$$\begin{aligned}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) &\rightarrow x^{(2)} = \frac{3}{4} \\ \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) &\rightarrow y^{(2)} = \frac{1}{4} \\ \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) &\rightarrow z^{(2)} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$

－ 3 回目の反復計算

これも 2 回目と同じように計算する。

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right) &\rightarrow x^{(3)} = \frac{7}{8} \\ \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right) &\rightarrow y^{(3)} = \frac{1}{8} \\ \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) &\rightarrow z^{(3)} = \frac{15}{16}\end{aligned}$$

以上より、3 回のガウス・ザイデル法の反復計算で得られる近似解は、

$$x \simeq \frac{7}{8} \quad y \simeq \frac{1}{8} \quad z \simeq \frac{15}{16} \quad (3)$$

となる。