

オイラー法の練習

山本昌志*

2006年9月5日

概要

オイラー法の理論が分かったので、練習問題を解いて理解の内容を深める。

1 練習問題

1.1 内容

オイラー法で微分方程式を解く、練習を行う。以下の練習問題を解け。

[練習 1] 次の微分方程式をオイラー法で計算せよ。計算する x の範囲 $[0,2]$ とする。

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{初期条件: } x = 0 \text{ の時, } y = 0 \quad (1)$$

- きざみ幅を 0.1 として、理論値と計算値を同じグラフに書け。誤差のグラフも書け。
- きざみ幅を以下のように変化させた場合、 $x = 2$ のときの誤差を求めよ。
0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001,
- きざみ幅と誤差の関係を考察せよ。
- きざみ幅が 0.001 の場合の誤差のグラフを描き、それを考察せよ。横軸: x , 縦軸: 誤差。

[練習 2] 同様にして、以下の微分方程式を計算せよ。

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \sin y \quad y(0) = 0 \quad (2)$$

[練習 3] 以下の 2 階の微分方程式をオイラー法で計算せよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \sin x \quad y'(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad (3)$$

* 国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

1.2 ヒント

1.2.1 問1に関して

プログラム方法 アルゴリズムは、テキスト「常微分方程式の数値計算法」で説明しているので分かっているものとする。まずは、計算の方針であるが、次のようにすればよい。

- 計算結果の x_i と y_i は、配列に格納する。すなわち、プログラム中では、 x_i は $x[i]$ に、 y_i は $y[i]$ という配列で表現する。
- 計算結果はグラフにするため、ファイルに保存する。第一列目: x_i の値、第二列目: y_i の値、第三列目: 誤差
- 誤差は、理論値から計算値 y_i を引いたものとする。

この方針に基づいて、オイラー法の計算アルゴリズムを実現するフローチャートは図1のようになる。いろいろな方法があるが、諸君にとって分かりやすく書いたつもりである。自分でプログラムが考えられる者は、これと同一にする必要はまったく無い。

計算結果— x_i と y_i 、誤差—は、ファイルには次のフォーマットで書けば良い。データの間はタブ ($\backslash t$) で区切る。

0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.1000000000000000	0.0000000000000000	0.0100000000000000
0.2000000000000000	0.0200000000000000	0.0200000000000000
0.3000000000000000	0.0600000000000000	0.0300000000000000

長いので、この辺は省略

1.7000000000000000	2.7200000000000000	0.1700000000000000
1.8000000000000000	3.0600000000000000	0.1800000000000000
1.9000000000000000	3.4200000000000000	0.1900000000000001
2.0000000000000000	3.8000000000000000	0.2000000000000000

グラフの出力方法 計算したデータをグラフに出力する方法を述べる。詳細は、以前の gnuplot の講義ノートを見れば分かるだろう。

先に示した結果を格納しているファイル名を「result.txt」として、話を進める。グラフ描画アプリケーションは gnuplot を使う。

- gnuplot を起動させるためには「gnuplot」とターミナルに打ち込む。
- 第一列目を x 軸、第二列目を y 軸として、グラフを描画するためには、gnuplot 起動画面で以下のように入力する。

```
plot "result.txt" using 1:2
```

線でつなぐ場合は、以下のようにする。

```
plot "result.txt" using 1:2 with line
```

- 第一列目の x_i と第二列目の y_i , そして理論解の x^2 を一つのグラフに描く場合 , 次のようにする .

```
plot "result.txt" using 1:2, x**2
```
- ディスプレイ上ではなくて , グラフをファイルにしたい場合がある . 例えば , windows でよく使われる emf(拡張メタファイル) ファイルとして , グラフを出力する場合 , 次のようにする .
 1. 出力先を emf にする .

```
set terminal emf
```
 2. ファイル名を決める .

```
set output "hoge.hoge.emf"
```
 3. 後は , 「plot」 コマンドを使って , ディスプレイ上に描画するのと同様にすれば , 図のファイルができていく .
- 適当なワープロで図を取り込めば , 文書ができていく . linux では , StarSuite Writer というワープロが使える . デスクトップ上の「StarSuite 7 文書ドキュメント」をダブルクリックすると起動する .

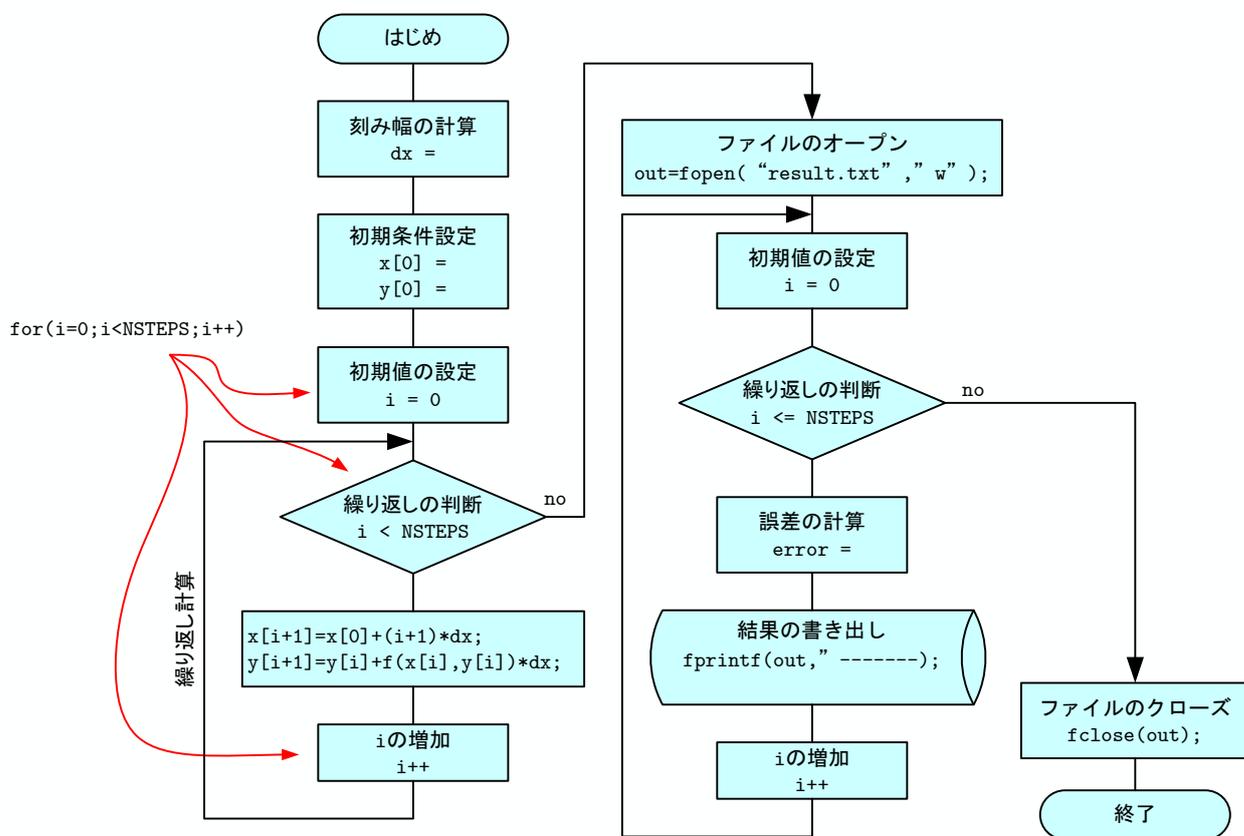


図 1: オイラー方で常微分方程式を計算するフローチャート .

1.2.2 問 2 に関して

問 1 を参考にして，自分で考える．

1.2.3 問 3 に関して

これは，1 階の連立微分方程式に式を変形する．

$$\frac{dy}{dx} = z \quad (4)$$

$$\frac{dz}{dx} = -z - y - \sin x \quad (5)$$

これから，オイラー法の漸化式は

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x \quad (6)$$

$$y_{i+1} = y_i + z\Delta x \quad (7)$$

$$z_{i+1} = z_i + (-z - y - \sin x)\Delta x \quad (8)$$

なる．後は，芋づる式に計算するだけ．

2 レポート提出

2.1 課題

練習問題の [問 1] に関して，以下を提出のこと．

- 常微分方程式の理論解
- プログラムのソースリストとフローチャート．web にある私 (山本) が作成したフローチャートの転載は厳禁．
- きざみ幅が 0.1 の場合の理論値と計算値のグラフ．ひとつのグラフにまとめること．
- きざみ幅を以下のように変化させた場合， $x = 2$ のときの誤差ときざみ幅の関係のグラフ．両対数グラフに，横軸:きざみ幅，縦軸:誤差
0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001,
- きざみ幅と誤差の関係の考察
- きざみ幅が 0.001 の場合の誤差のグラフ．横軸: x ，縦軸:誤差．
- きざみ幅が 0.001 の場合の誤差のグラフから分かること，あるいは考察．

2.2 提出方法

期限	9月19日(火) 24:00
用紙	A4
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙を1枚つけて、以下の項目を分かりやすく記述すること。 授業科目名「計算機応用」 課題名「課題 常微分方程式(オイラー法)」 5E 学籍番号 氏名 提出日
内容	2ページ以降に課題を記述すること。