# 対数グラフの書き方

山本昌志*

2005 年 4 月 10 日

## 1　本日の授業内容

前期の電子系の実験で，対数グラフを使用する．そこで，対数グラフの使い方を説明する．

## 2　方眼紙について

諸君が使う方眼紙は，普通の方眼紙 (名前??), 型対数方眼紙，両対数方眼紙が主である．これらをデータに応じて使い分ける必要がある．まず，これらの方眼紙の特徴を述べる．

### 2.1　普通の方眼紙

これは，もっともおなじみの，x 軸と y 軸ともリニアーになっているものである．説明するまでもなく，よく知っているだろう．これはグラフ上の基準点からの距離 $(X, Y)$ に，データ $(x, y)$ を

$$X = C_{0x} + C_{1x}x \qquad\qquad Y = C_{0y} + C_{2y}y \tag{1}$$

のようにプロットする．$C_{1x}$ と $C_{1y}$ はグラフのスケールを決める定数，$C_{0x}$ と $C_{0y}$ はオフセットである．難しいことを言わなくても，x 軸と y 軸の交点 (基準点) を $(C_{0x}, C_{0y})$ として，等間隔に目盛りを付けていると言うだけのことである．

したがって，x 軸と y 軸ともリニアーになっている方眼紙では，$y = ax + b$ の一次関数が

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} &= \frac{C_{1y}}{C_{1x}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{C_{1y}}{C_{1x}}a \end{aligned} \tag{2}$$

のように，グラフ用紙で直線になる．なぜならば，$x$ に依存しないで，傾きが一定となっているからである．このグラフの傾き $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}X$ と，スケールの比 $C_2/C_1$ から，データの 1 次関数の係数 $a$ が分かるのである．

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

## 2.2　片対数方眼紙

この方眼紙の軸は，ちょっと変わっていて，片方はリニアーで，もう一方は対数軸となっている．横軸，縦軸のいずれも対数軸にすることができる．ここでは話を簡単にするために，縦軸を対数軸とする．そうすると，横軸はリニアー軸になる．先ほどと同様にグラフ上の基準点からの距離を $(X,Y)$ とする．この場合は，

$$X = C_{0x} + C_{1x}x \qquad\qquad Y = C_{0y} + C_{1y}\log_{10} y \tag{3}$$

となる．ここで，$C_{0x}$ と $C_{0y}$ はグラフの原点を決めるオフセット値である．$C_{1x}$ と $C_{1y}$ はグラフのスケールを決める定数である．

このようなグラフで直線となる関数を考えることにする．そのために，値 $(x,y)$ がちょっとだけ変化した場合，グラフ上の点の動きを調べてみよう．それは，

$$\mathrm{d}X = C_{1x}\mathrm{d}x \qquad\qquad Y = \frac{C_{1y}}{\log_e 10}\frac{\mathrm{d}y}{y} \tag{4}$$

となる．これから，グラフ上で，傾き $\alpha$ を持つ直線は，

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{C_{1y}}{C_{1x}}\frac{1}{y\log_e 10}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha \tag{5}$$

となる．ここで，縦軸と横軸のスケールの比 $C_{1y}/C_{1x}$ は 1 にしたグラフが多い[1]．そこで，この比を 1 として，話を進める．グラフ上で直線になる関数は，式 13 の微分方程式の解である．この微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\alpha\log_e 10)y \tag{6}$$

と見覚えがあるものに書き換えることができる．この方程式の解は，

$$y = ke^{(\alpha\log_e 10)x} \tag{7}$$

$$= k \times 10^{\alpha x} \tag{8}$$

となる．ここで，$k$ は積分定数である．この結果から，方対数グラフ上では指数関数が直線で表されるのである．いうまでもないが，

$$k \times 10^{\alpha x} = k \times \exp\left(\frac{\alpha}{\log_{10} e}x\right) \tag{9}$$

となるので，底が 10 であろうが，ネピア $e$ であろうが，その他なんでも指数関数が直線で表せる．

ようするに方対数グラフの傾き $\alpha$ が，指数関数 $10^{\alpha x}$ となるのである．

## 2.3　両対数方眼紙

両対数グラフは，片対数方眼紙と同じように考えることができ，データ $(x,y)$ は，グラフ上の $(X,Y)$

$$X = C_{0x} + C_{1x}\log_{10} x \qquad\qquad Y = C_{0y} + C_{1y}\log_{10} y \tag{10}$$

[1] 今回，捜してきた片対数グラフはそうなっていない．非常に驚いたが，近頃はそういうのもあるらしい．ここでは，昔から使われてきた，横軸の 10 目盛り (10cm) の寸法と縦軸の 1 桁が 10cm と等しいものを対象にする．

に変換される．

先ほどと同様にグラフ上で直線となる関数を考えることにする．値 $(x, y)$ がちょっとだけ変化した場合，グラフ上の点の動きは，

$$\mathrm{d}X = \frac{C_{1x}}{\log_e 10}\frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \mathrm{d}Y = \frac{C_{1y}}{\log_e 10}\frac{\mathrm{d}y}{y} \tag{11}$$

である．これから，グラフ上で，傾き $\alpha$ を持つ直線は，

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{C_{1y}}{C_{1x}}\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{12}$$

となる．両対数グラフでは，縦軸と横軸のスケールの比 $C_{1y}/C_{1x}$ は 1 にする．

グラフ上で，傾き $\alpha$ を持つ直線は，

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha \tag{13}$$

となる．この微分方程式の解は，

$$y = kx^{\alpha} \tag{14}$$

である．従って，両対数グラフにプロットして，それが直線であれば，$x^{\alpha}$ の関数系であることが分かる．そして，グラフの傾きにより，$\alpha$ を求めることあできる．

# 3 いろいろなデータ

## 3.1 細菌の増加

シャーレ中の寒天培地で細菌の増殖を観察することを考える．その細菌は，1 時間で倍に増加するとする．最初,1 匹の細菌が時間とともに増加する様子を 2 つのグラフを描いて調べる．

**[練習 1]** 普通の方眼紙に，横軸を時間，縦軸に細菌の数をプロットせよ．何がわかるか?.

**[練習 2]** 同様に，片対数グラフにプロットせよ．15 時間後の細菌の数はど うなっているだろうか?

細菌の数を見れば，指数関数的に増加することの恐ろしさが分かるだろう．身近な例として，サラ金のローンも指数関数になっている．短い時間は，一次関数となっていて気がつかないが，長い時間借りると，恐ろしいことになる．年利 20%の複利でお金を借りた場合の返済額をプロットしてみるとよく分かる．

## 3.2 ケプラーの法則

この辺の話は，数学セミナー 2004 年 4 月号の対数方眼紙で遊ぼう [1] をかなり参考にしている．

惑星の公転周期と半径の関係を表したのがケプラーの第三法則で，1619 年にケプラーが発表した．この法則はティコ・ブラーエの長年にわたっての惑星の観測結果を詳細に分析したことから得られたものである．天空を支配しているケプラーの第三法則に地上の力学を加味すると，ニュートンの万有引力の法則が得られる．ティコ・ブラーエ，ケプラー，ニュートンという流れで，天体の力学は進んでいったのである．

ここではケプラーの第三法則の内容は言わないものとして，観測結果 (表 1) から, その法則を再発見してもらう．さらに，得られた法則と遠心力の関係を用いて，ニュートンの万有引力の法則を導いて見よ．

[**練習 1**] 普通の方眼紙に，横軸を公転周期，縦軸を公転半径をプロットせよ．何が分かるか?．それとも何も分からないか?．

[**練習 2**] 同様に，両対数グラフにプロットせよ．グラフの結果から，何が言えるか?．

表 1: 太陽の惑星と公転半径と周期 [1]

| 惑星 | 公転半径 $R$(地球=1) | 公転周期 $T$(地球=1) |
|---|---|---|
| 水星 | 0.39 | 0.24 |
| 金星 | 0.72 | 0.62 |
| 地球 | 1.00 | 1.00 |
| 火星 | 1.52 | 1.88 |
| 木星 | 5.20 | 11.9 |
| 土星 | 9.55 | 29.5 |
| 天王星 | 19.2 | 84.0 |
| 海王星 | 30.1 | 164.8 |
| 冥王星 | 39.5 | 247.8 |

# 4　方眼紙の使い分け

では，実際の測定データをグラフにする場合，どのような基準で方眼紙を選んだらよいのだろうか?．データの関数形が分かっているならば，データが直線に並ぶ方眼紙を選んでプロットするのが良いだろう．

しかし，データの関数形が分からない場合が実際には多い．その場合は，大体，次の基準でグラフ用紙を選んだらよいだろう．

- データの間隔がほぼ等間隔の場合は，リニアーの軸を使う．測定データの単位が [dB] の場合は，リニアーの軸をつかう．これは，すでに対数計算が施されているからである．
- データの間隔が大きく異なれば，対数軸を使う．あるいは，データのレンジが広く，大きなデータから小さいデータまで示したい場合にも，対数軸を使う．

私はこのような観点から，グラフの軸を選んでいる．そして，実際に書いてみて，見やすければ OK としている．パソコンを使ってグラフを作成しているので，軸の変更が容易なため，いろいろ書いてみてデータばまんべんなく分布するように軸を選んでいるのである．

データに負の数がある場合は，どうするか?．どうしても対数グラフに書く必要がある場合は，絶対値を取るなどして，データの加工を行っている．これは，場合に応じて分かりやすいようにデータを加工すれば良い．諸君がいっぱいグラフを書いて，経験を積めば，データの加工方法も分かるだろう．

いずれにしても，グラフを書く目的は，データを一目で理解させることにある．したがって，グラフの良し悪しは，分かりやすいか否かにかかっている．諸君は，分かりやすいグラフを書くことに心がけなくてはならない．

## 参考文献

[1] 細谷治夫. 対数方眼紙で遊ぼう. 数学セミナー, pp. 46–55. 日本評論社, 4 月号 2004 年.