

冬休みおよび補習対象者の課題

山本昌志*

2006年12月21日

概要

冬休みおよび補習(12月26日)を受けるに際しての課題について説明する。

1 課題について

1.1 課題の選択について

電気数学受講者—3年電気の学生—は、以下の通り課題を実施しなくてはならない。

- **補習対象者向け課題**。中間試験で50点未満の者は補習・再試験を受けることができる。ただし、補習を受けるためにはp.2の2節に載せている課題を実施し、補習当日に提出すること。提出しなかった場合、補習を受けることができない。
- **冬休み中の選択課題**。全ての学生は、以下の2つの課題から、少なくともひとつを選択して実施しなくてはならない。どちらを選択するかは、自由である。
 - － 講義の理解が不十分な者向けの課題。p.3の3.1節に載せている課題を実施すること。
 - － 講義の理解が十分な者向けの課題。p.6の3.2節に載せている課題を実施すること。

1.2 注意事項

冬休み中の選択課題の全てができなくてもよい。ただし、少なくとも20時間はそのために時間を費すこと。レポート用紙には、途中の計算や間違えた部分も全て記述し(消しゴムをつかうな)、自分で努力したことを示すこと。もちろん、20時間以内で全て完了してもよい。「途中でもよいから20時間は努力しろ!!」ということである。

補習対象者向けの課題についても同様である。ここでは、少なくとも10時間を費すこと。

これらの課題は諸君自身の能力を高めるために課している。それからすると、他人のレポートを写すという行為は、全く無意味である。時間の無駄で、能力の向上に全く寄与しない。

論理的な思考能力を高めるためには、途中の説明や計算を省いてはならない。できるだけ詳細に計算過程を説明せよ。答えのみでは全く練習にならない。

*国立秋田工業高等専門学校 電気情報工学科

1.3 評価について

通常のレポートの3倍の評価とする。

2 補習対象者向け課題

- [問1] 指数関数と三角関数の関係を示すオイラーの公式を示せ。
- [問2] オイラーの公式を使って、 $\sin x$ と $\cos x$ を指数関数で表す式を求めよ。
- [問3] 三角関数の直交関係を示す以下の式が成り立つことを計算により示せ。ただし、 m と n は自然数とする。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0$$

- [問4] 関数 $f(x)$ は x のすべての実数について定義されていて、周期 2π をもつものとする。この $f(x)$ が、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned}$$

のように三角関数で展開できるものとする。これをフーリエ級数と言う。前問の三角関数の直交性を用いて、フーリエ係数 a_0 と a_n 、 b_n の計算式を求めよ。

- [問5] 前問の結果を利用して、図3と図4に示す周期関数のフーリエ級数を計算せよ。

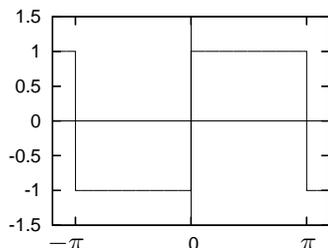


図 1: 周期 2π の矩形波

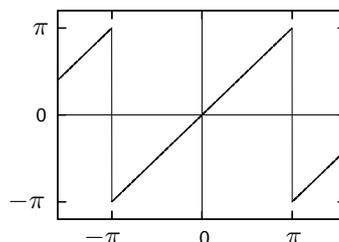


図 2: 周期 2π ののこぎり波

3 冬休み中の選択課題

3.1 講義の理解が不十分な者向けの課題

3.1.1 フーリエ級数を学ぶための基礎

単位の変換 次の角度の単位の変換を行え. π [rad] = 180 [deg] を使って, 計算式をきちんと示すこと.

[問 1] 30 [deg] [問 2] 135 [deg]

[問 3] -210 [deg] [問 4] $\frac{\pi}{3}$ [rad]

[問 5] $-\frac{5\pi}{4}$ [rad] [問 6] 2π [rad]

三角関数の値 次の三角関数, および逆三角関数の値を計算せよ. 図を描いて値を示すこと.

[問 1] $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ [問 2] $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

[問 3] $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ [問 4] $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

[問 5] $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ [問 6] $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

[問 7] $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ [問 8] $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

[問 9] $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ [問 10] $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

関数のグラフ 以下のグラフをグラフ用紙にきちんと描け

[問 1] $f(x) = \sin(x)$ のグラフを描け.

[問 2] $f(x) = \cos(x)$ のグラフを描け.

[問 3] $f(x) = \tan(x)$ のグラフを描け.

[問 4] $f(x) = e^{-x}$ のグラフを描け.

[問 5] $f(x) = \log(x)$ のグラフを描け.

指数関数と対数関数

[問 1] 指数の法則,

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$$

がこのようになることを単純な具体例で示せ.

[問 2] ネピア数 e の近似値を示せ.

[問 3] 2^0 の値とその理由を示せ.

[問 4] 2^{-1} の値とその理由を示せ.

[問 5] $2^{\frac{1}{2}}$ の近似値とその理由を示せ.

[問 6] $(e^\alpha)^\beta$ を簡単にせよ.

[問 7] $e^\alpha \times e^\beta$ を簡単にせよ.

[問 8] 方程式 $e^{\log x} = 5$ を解け.

[問 9] $y = e^{2x+3}$ を $x =$ の式に直せ.

[問 10] $\log\left(\frac{b}{a}\right)$ を分解せよ.

[問 11] $\log(ab)$ を分解せよ.

[問 12] $\log\left(\frac{b^\beta}{a^\alpha}\right)$ を分解せよ.

三角関数の性質

[問 1] $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ となる理由を説明せよ.

[問 2] $\tan^2 \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} = -1$ を導け.

[問 3] 加法定理 $\sin(\alpha + \beta)$ を示せ.

[問 4] 加法定理 $\cos(\alpha + \beta)$ を示せ.

[問 5] $\cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1$ を導け.

[問 6] $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2 \theta$ を導け.

[問 7] $\sin(2\theta) = 2\sin \theta \cos \theta$ を導け.

[問 8] 以下を導け.

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

[問 9] 以下を導け.

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

微分法

[問 1] 導関数 $f'(x)$ とは図形ではどのような意味になるか?

[問 2] $f(x)g(x)$ の導関数を示せ.

[問 3] $\frac{f(x)}{g(x)}$ の導関数を示せ.

[問 4] $f(x)g(x)h(x)$ の導関数を示せ.

[問 5] $f(g(x))$ の導関数を示せ.

[問 6] 以下の関数 $f(x)$ の導関数を示せ. 計算過程もきちんと書くこと.

$$\begin{array}{llll} f(x) = x^n & f(x) = \sin x & f(x) = \cos x & f(x) = \tan x \\ f(x) = e^x & f(x) = \log |x| & f(x) = \sin(x^2) & f(x) = \arcsin x \\ f(x) = e^x \cos x & f(x) = e^{\sin x} \cos x & & \end{array}$$

積分法

[問 1] 定積分 $\int_a^b f(x) dx$ の意味を図形を用いて説明せよ.

[問 2] $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ を示せ.

[問 3] 部分積分の公式を示せ.

[問 4] 置換積分の公式を示せ.

[問 5] 以下の積分を計算せよ.

$$\begin{array}{cccc} \int x^n dx & \int \sin x dx & \int \sin(ax) dx & \int \cos x dx \\ \int \tan x dx & \int \arcsin x dx & \int e^x dx & \int a^x dx \\ \int \log |x| dx & \int \frac{dx}{x^2 + a^2} & & \end{array}$$

3.1.2 フーリエ解析

これは、補習対象者の問題と同一である。補習対象者はもう一度、この問題を解け。最初から自力で計算すること。補習の時提出したレポートと同一だと減点する。

[問 1] 指数関数と三角関数の関係を示すオイラーの公式を示せ.

[問 2] オイラーの公式を使って、 $\sin x$ と $\cos x$ を指数関数で表す式を求めよ.

[問 3] 三角関数の直交関係を示す以下の式が成り立つことを計算により示せ。ただし、 m と n は自然数とする.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx &= 0 \end{aligned}$$

[問 4] 関数 $f(x)$ は x のすべての実数について定義されていて、周期 2π をもつものとする。この $f(x)$ が、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned}$$

のように三角関数で展開できるものとする．これをフーリエ級数と言う．前問の三角関数の直交性を用いて，フーリエ係数 a_0 と a_n , b_n の計算式を求めよ．

[問 5] 前問の結果を利用して，図 3 と図 4 に示す周期関数のフーリエ級数を計算せよ．

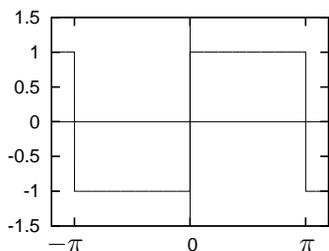


図 3: 周期 2π の矩形波

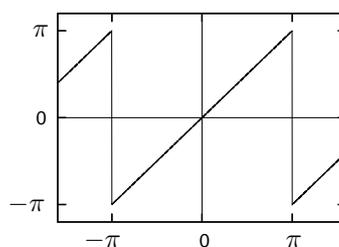


図 4: 周期 2π ののこぎり波

3.2 講義の理解が十分な者向けの課題

第 10 回の講義 (12 月 19 日) で配布したプリント (フーリエ級数の性質) に示している課題を実施すること．すなわち,「教科書 [1] の p.237-238 の演習問題 IV-I」である．

4 レポート 提出要領

4.1 補習対象者向け課題

期限	12 月 26 日 (火) AM 13:05(講義開始前に手渡し OK. 講義終了後はダメ)
用紙	A4 のレポート用紙. 左上をホッチキスで綴じて, 提出のこと.
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること. 授業科目名「電気数学」 課題名「課題 補習課題」 提出日 3E 学籍番号 氏名
内容	2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること.

4.2 冬休み中の選択課題

期限	1月16日(火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK. 講義終了後はダメ)
用紙	A4のレポート用紙. 左上をホッチキスで綴じて, 提出のこと.
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること. 授業科目名「電気数学」 課題名「課題 フーリエ級数の性質」 提出日 3E 学籍番号 氏名
内容	2ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること.

参考文献

- [1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.