

学年末試験へむけて (電気数学)

山本昌志*

2007年2月23日

概要

学年末試験の範囲をまとめる。学生諸君は、この内容を理解して試験に臨まなくてはならない。

1 中間試験の内容

試験範囲は、教科書 [1] の p.231–254 である。第 10 回–第 17 回の講義内容から出題する。主に、以下の内容について出題し、その理解度を確認する。

- パーセバルの関係式
- フーリエ積分・フーリエ変換
- フーリエ変換の応用 (インピーダンスの計算)
- 波動方程式

2 パーセバルの等式

これまで学習したように、区間 $[-L, L]$ で定義された区分的に連続な関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (1)$$

$$\text{ただし, } a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

* 国立秋田工業高等専門学校 電気情報工学科

のようにフーリエ級数で表すことができる。式 (4) の両辺に $f(x)$ を乗じて¹，関数が定義されている区間で積分を行う²。

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} f(x) dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right] f(x) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &\quad \text{式 (4) の } a_n \text{ と } b_n \text{ の計算式により} \\ &= L \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (L a_n^2 + L b_n^2) \end{aligned} \tag{2}$$

以上より，

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \tag{3}$$

が得られる。これをパーセバルの等式と言う。直交関数系のピタゴラスの定理のようなものである。フーリエ級数の収束の確認に有効である。

3 フーリエ積分・変換

3.1 フーリエ級数

次のような関数はフーリエ級数で表すことができる。

- 周期的に繰り返す関数
- 有限な区間で定義された関数

例えば，周期 $2L$ あるいは区間 $[-L, L]$ で定義された関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \tag{4}$$

$$\text{ただし， } a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

のようにフーリエ級数で表すことができる。

3.2 フーリエ積分

先に示したように，フーリエ級数は有限な区間 $[-L, L]$ で定義された関数を表すことができる。それを無限の区間 $[-\infty, \infty]$ に拡張することを考える。ここでは，有限な L の式から出発して，それを $L \rightarrow \infty$ にす

¹両辺を二乗して積分しても同じ結果が得られる。

²本当はここで項別積分についての面倒な話 (教科書 [1] の p.233 定理 2) があるのだが，気にしないことにする。今まで学習してきた通り，ここでも項別の積分ができるものとする。

る．式 (4) の $f(x)$ に a_n と b_n を代入すると，

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f(u) \cos \frac{n\pi u}{L} du + \sin \frac{n\pi x}{L} \int_{-L}^L f(u) \sin \frac{n\pi u}{L} du \right] \quad (5)$$

が得られる．ここで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \text{有限の値} \quad (6)$$

とするならば，式 (5) の右辺の第一項はゼロに収束する³．なぜならば， $1/L$ の係数が無限小になるからである．つぎに，

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad (7)$$

$$\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \quad (8)$$

とおく．すると， $L \rightarrow \infty$ は $\Delta\alpha \rightarrow 0$ となる．したがって， $L \rightarrow \infty$ の場合の式 (5) は，

$$f(x) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(\alpha_n x) \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(\alpha_n u) du + \sin(\alpha_n x) \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin(\alpha_n u) du \right] \quad (9)$$

となる．ここで，

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u du \quad (10)$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha u du \quad (11)$$

とおく．すると，式 (9) は，

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \Delta\alpha \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(\alpha_n x) A(\alpha_n) + \sin(\alpha_n x) B(\alpha_n)] \\ &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(\alpha_n x) A(\alpha_n) \Delta\alpha + \sin(\alpha_n x) B(\alpha_n) \Delta\alpha] \\ &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} A(\alpha_n) \cos(\alpha_n x) \Delta\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} B(\alpha_n) \sin(\alpha_n x) \Delta\alpha \right] \end{aligned} \quad (12)$$

となる．この右辺はリーマン和の極限—普通の積分—の形になっている．したがって，

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha + \int_0^{\infty} B(\alpha) \sin \alpha x d\alpha \quad (13)$$

と書くことができる．これまでの話をまとめると，次のようになる．

³教科書 [1] では， $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ が有限確定ならばゼロに収束すると書いてある．このことは正しいが，これまでの議論ではそのようなことは分からない．教科書はちょっと言い過ぎであろう．参考文献 [?] などにはきちんとした証明がある．

フーリエ積分 1

区間 $[-\infty, \infty]$ で定義された関数 $f(x)$ は、次のフーリエ積分で表すことができる。

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha + \int_0^{\infty} B(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha$$

ただし、

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(\alpha u) \, du$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin(\alpha u) \, du$$

つぎに、式 (10) と式 (11) を式 (13) に代入すれば、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u \, du \cos \alpha x \, d\alpha + \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha u \, du \sin \alpha x \, d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) [\cos \alpha u \cos \alpha x + \sin \alpha u \sin \alpha x] \, du \, d\alpha \end{aligned}$$

三角関数の加法定理を使うと

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha(x-u) \, du \, d\alpha \quad (14)$$

がえられる。これもフーリエ積分である。

3.3 フーリエ積分 (指数関数形)

式 (14) から、指数関数を用いたフーリエ積分を求める。その計算をするときに、オイラーの公式より導くことができる。ここでは、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (15)$$

を用いる。

この式を使うと、式 (14) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha(x-u) \, du \, d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{e^{i\alpha(x-u)} + e^{-i\alpha(x-u)}}{2} \, du \, d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha(x-u)} \, du \, d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha(x-u)} \, du \, d\alpha \end{aligned}$$

右辺第二項を $\alpha \rightarrow -\alpha$ と変数変換する．すると， $d\alpha \rightarrow -d\alpha$ ， $\infty \rightarrow -\infty$ となる．したがって，

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)} du d\alpha - \frac{1}{2\pi} \int_0^{-\infty} \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)} du d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)} du d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)} du d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)} du d\alpha
 \end{aligned} \tag{16}$$

この式は，一般には次のように変形されて使われることが多い．

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)} du d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha x} e^{-i\alpha u} du d\alpha \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{-i\alpha u} du \right] e^{i\alpha x} d\alpha
 \end{aligned} \tag{17}$$

この式もまた，フーリエ積分の別の形である．他のフーリエ積分に比べると式が単純であること，また次のフーリエ変換との関係が深いことから，これがもっとも重要である．

3.4 フーリエ変換

式 17 から，次のような関係式を導くことができる⁴．

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t} dt \tag{18}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \tag{19}$$

これをフーリエ変換 (Fourier transform) と言う．これは，時間情報を周波数情報に変換している．すなわち，時刻の関数で振幅が $f(t)$ が分かったとすると，周波数 (角振動数) の関数でその振幅 $F(\omega)$ がわかる．

4 フーリエ変換の応用

4.1 導関数のフーリエ変換

導関数のフーリエ変換は，電気では極めて重要なのでもう一度，話しておく．導関数 $f'(t)$ のフーリエ変換を考える．フーリエ変換の定義の式 (18) に代入し，部分積分を行うと，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^\infty + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t} dt \tag{20}$$

⁴ $x \rightarrow t$ ， $u \rightarrow t$ ， $\alpha \rightarrow \omega$ と変数変換を行う．

が得られる．自然界の物理量 $f(t)$ は，

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \quad (21)$$

である．なぜならば，無限に続く波は存在しないからである．したがって，この式の右辺の第一項はゼロとなり，導関数のフーリエ変換は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt &= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega F(\omega) \end{aligned} \quad (22)$$

となる．ようするに導関数のフーリエ変換は，元の関数のフーリエ変換の $i\omega$ 倍である．

2階の導関数のフーリエ変換も考えてみよう．同じように部分積分の公式を使うと，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt \quad (23)$$

となる．式 (21) から， $f'(-\infty) = f'(\infty) = 0$ である．これから，右辺第一項はゼロとなる．右辺第二項は，導関数のフーリエ変換となっている．したがって，二階の導関数のフーリエ変換は，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} e^{-i\omega t} dt = (i\omega)^2 F(\omega) \quad (24)$$

となる．同じ計算を進めると， n 回の導関数のフーリエ変換は，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(t)}{dt^n} e^{-i\omega t} dt = (i\omega)^n F(\omega) \quad (25)$$

となる．

4.2 電気回路への応用

4.2.1 インピーダンスの定義

フーリエ変換を使って，図 1-3 の基本的な回路素子のインピーダンスを考えよう．諸君はこれらの回路素子の時間領域における基本的な動作の知識しかない—とする．回路の動作を表す時間領域の微分方程式から，周波数領域—正確には角振動数領域—の方程式に直して，周波数領域のインピーダンスを求めることにする．したがって，インピーダンスは ω の関数で，

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} \quad (26)$$

と定義する．ここで， $\tilde{V}(\omega)$ は周波数領域の電圧

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt \quad (27)$$

$\tilde{I}(\omega)$ は周波数領域の電流

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{-i\omega t} dt \quad (28)$$

である．

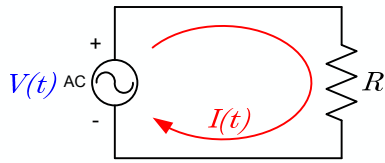


図 1: レジスタンス

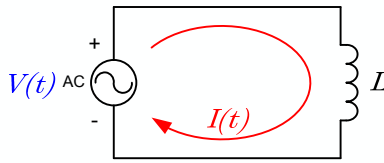


図 2: インダクタンス

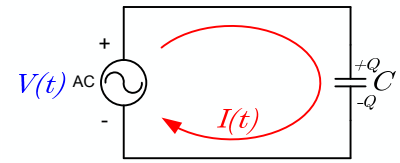


図 3: キャパシタンス

4.2.2 抵抗

図 1 の回路を計算することにより，抵抗の周波数領域のインピーダンスを求める．電流に関するキルヒホッフの法則は自動的に満たしている．電圧に関するキルヒホッフの法則より，

$$-V(t) + RI(t) = 0 \quad (29)$$

となる．両辺に $e^{-i\omega t}$ 両辺を乗じて，区間 $[-\infty, \infty]$ で t について積分を行う．すると，

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(t)e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} RI(t)e^{-i\omega t} dt = 0 \quad (30)$$

が得られる．これは，フーリエ変換なので，

$$-\tilde{V}(\omega) + R\tilde{I}(\omega) = 0 \quad (31)$$

と書いてもよい．この式から，直ちに

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} = R \quad (32)$$

が得られる．普通の抵抗 (resistance) は，周波数に依存しない．

4.2.3 インダクタンス

つぎに，図 2 の回路を計算することにより，インダクタンスの周波数領域のインピーダンスを求める．インダクタンスは，電流が増加すると電流を流さないように逆に電圧が発生する．発生する電圧は，電流の変化率に比例し，インダクタンス L の大きさにも比例する．電流の流れる方向を図 2 のようにして，インダクタンスの下から上方向を正の電圧とすると，

$$\begin{aligned} V_L(t) &= L \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} \\ &= L \frac{dI(t)}{dt} \end{aligned} \quad (33)$$

となる．

図 2 の回路の電圧に関するキルヒホッフの法則は，

$$-V(t) + V_L(t) = 0 \quad (34)$$

となる．先の式から，

$$-V(t) + L \frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (35)$$

である．先ほど同様に，両辺をフーリエ変換する．ここで，導関数のフーリエ変換を使うと，

$$-\tilde{V}(\omega) + i\omega L \tilde{I}(\omega) = 0 \quad (36)$$

となる．したがって，この回路のインピーダンスは，

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} = i\omega L \quad (37)$$

である．インピーダンスは周波数に依存するのである．

4.2.4 キャパシタンス

つぎに，図 3 の回路を計算することにより，キャパシタンスの周波数領域のインピーダンスを求める．キャパシタンスは，電極に電荷が貯ると電圧が発生する．発生する電圧は，電荷量に比例し，静電容量 C にも反比例する．電荷の方向を図 3 のようにして，キャパシタンスの下から上方向を正の電圧とすると，

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (38)$$

となる．

図 3 の回路の電圧に関するキルヒホッフの法則は，

$$-V(t) + V_C(t) = 0 \quad (39)$$

となる．先の式から，

$$-V(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (40)$$

である．電流の関数を使いたい，電荷の関数となっている．電荷から電流に直すために，両辺を時間で微分する．

$$-\frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ(t)}{dt} = 0 \quad (41)$$

これは，

$$-\frac{dV(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} = 0 \quad (42)$$

と書き直すことができる．電流と電荷の方向を図3のように決めたならば，

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) \quad (43)$$

の関係があるからである．

先ほど同様に，両辺をフーリエ変換する．ここで，導関数のフーリエ変換を使うと，

$$-i\omega\tilde{V}(\omega) + \frac{\tilde{I}(\omega)}{C} = 0 \quad (44)$$

となる．したがって，この回路のインピーダンスは，

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \quad (45)$$

である．この場合もまた，インピーダンスは周波数に依存するのである．

4.3 直列・並列回路

つぎに，図4と図5の回路を考える．

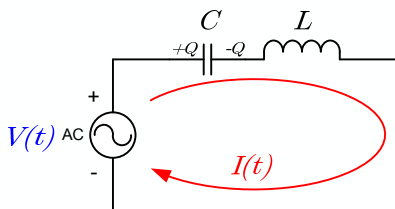


図 4: LC 直列回路

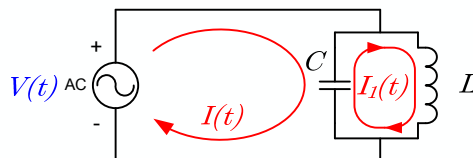


図 5: LC 並列回路

4.3.1 直列回路

図4の回路を表す電圧に関するキルヒホッフの法則は，

$$-V(t) + \frac{Q(t)}{C} + L \frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (46)$$

である．両辺を時間 t で微分し， $dQ(t)/dt = I(t)$ を使うと，

$$-\frac{dV(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} + L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} = 0 \quad (47)$$

が得られる．両辺をフーリエ変換すると，

$$-i\omega\tilde{V}(\omega) + \frac{\tilde{I}(\omega)}{C} + (i\omega)^2 L\tilde{I}(\omega) = 0 \quad (48)$$

がえられる．これを整理すると，

$$i\omega\tilde{V}(\omega) = \left[\frac{1}{C} + (i\omega)^2 L \right] \tilde{I}(\omega) \quad (49)$$

となる．これから，電源からみた回路のインピーダンスは，

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} \\ &= \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \\ &= i\omega L - \frac{i}{\omega C} \end{aligned} \quad (50)$$

となる．

4.3.2 並列回路

図4の回路を表す電圧に関するキルヒホッフの法則は，

$$-V(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (51)$$

$$-\frac{Q(t)}{C} + L \frac{dI_1(t)}{dt} = 0 \quad (52)$$

である．それぞれの式の両辺を微分すると，

$$-\frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ(t)}{dt} = 0 \quad (53)$$

$$-\frac{1}{C} \frac{dQ(t)}{dt} + L \frac{d^2 I_1(t)}{dt^2} = 0 \quad (54)$$

が得られる．ここで， $dQ(t)/dt$ はキャパシタンス中に流れる電流で，

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) - I_1(t) \quad (55)$$

となる．これを，式(53)と(54)に代入すると，

$$-\frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{C} [I(t) - I_1(t)] = 0 \quad (56)$$

$$\frac{1}{C} [-I(t) + I_1(t)] + L \frac{d^2 I_1(t)}{dt^2} = 0 \quad (57)$$

である．これらの連立方程式をフーリエ変換すると

$$-i\omega\tilde{V}(\omega) + \frac{1}{C} [\tilde{I}(\omega) - \tilde{I}_1(\omega)] = 0 \quad (58)$$

$$\frac{1}{C} [-\tilde{I}(\omega) + \tilde{I}_1(\omega)] + L(i\omega)^2 \tilde{I}_1(\omega) = 0 \quad (59)$$

が得られる．この連立方程式から，電源から見たインピーダンスの計算に不要な $\tilde{I}_1(\omega)$ を消去すると，

$$\frac{1}{C} [-\tilde{I}(\omega) - i\omega C \tilde{V}(\omega) + \tilde{I}(\omega)] + L(i\omega)^2 [-i\omega C \tilde{V}(\omega) + \tilde{I}(\omega)] = 0 \quad (60)$$

が得られる．整理すると，

$$(1 - \omega^2 LC) \tilde{V}(\omega) - i\omega L \tilde{I}(\omega) = 0 \quad (61)$$

となる．したがって，電源から見たインピーダンスは，

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad (62)$$

となる．

電気回路風 通常の電気回路の問題と同じになることを確かめよう．これは並列回路なので，インピーダンスは，

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{i\omega L} + i\omega C} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad (63)$$

となる．フーリエ変換を使って求めたインピーダンスと一致する．世の中，うまくできている．

5 波動方程式

5.1 変数分離法

図6に示すように x 軸と垂直な弦の振動の方程式を考える． x 軸からの弦の変位を $y(x, t)$ とする．場所 x と時刻 t を決めたら弦の変位が決まるので，変位は $y(x, t)$ と表すことができる．弦の変位は $y(x, t)$ は，弦の長さ L に比べて十分小さい場合，次の偏微分方程式が成り立つ．

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (c^2 = T/\rho, c \geq 0) \quad (64)$$

これを波動方程式と言う．ここで， c は波の速度， T は弦の張力， ρ は弦の線密度である．

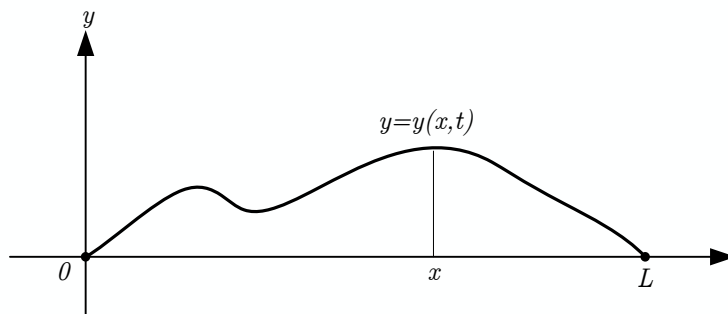


図 6: 弦の振動の様子．

波動方程式 (64) — 偏微分方程式のひとつ — の解を,

$$y(x, t) = X(x)T(t) \quad (65)$$

とそれぞれの変数の関数の積の形になると仮定する。これを変数分離形と言う。この仮定した解を元の偏微分方程式に代入する。すると,

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \quad (66)$$

が得られる。これは,

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (67)$$

となる。この左辺は時刻 t のみの関数で、右辺は場所 x のみの関数である。これが等しいということは、両辺の値は定数でなくてはならない。この定数を $-\lambda$ とすると,

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (68)$$

となる。これを整理すると,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (69)$$

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \quad (70)$$

という連立常微分方程式になる。弦の振動の場合、図 6 に示すように弦の両端で固定されている。固定されている部分では、弦の変位 $y(x, t)$ はゼロである。したがって,

$$X(0, t) = 0 \quad X(L, t) = 0 \quad (71)$$

である。この条件 — 境界条件 — を満たすことができるのは,

$$X(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (72)$$

である。時刻の項の常微分方程式 (70) は,

$$T'' + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T = 0 \quad (73)$$

となる。 $(n\pi c/L)^2$ は正の実数であるので、一般解は

$$T(t) = a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \quad (74)$$

となる。空間および時刻の常微分方程式から得られた解を元の仮定した解 (65) に代入すると

$$y_n(x, t) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \quad (75)$$

となる。元の波動方程式は線形なので、重ね合わせの原理が成り立つ。すなわち、解は

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_n y_n(x, t) \\ &= \sum_n \left(C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \end{aligned} \quad (76)$$

と書き表すことができる。

5.2 未知定数の値を決める

5.3 境界条件

弦の振動の境界条件は，

$$X(0, t) = 0 \qquad X(L, t) = 0 \qquad (77)$$

である．物理的には，弦の両端を固定している—ことに対応している．すでに，この条件は式 (76) に含まれている．空間に関する波動方程式の解のうち \sin の項のみを選んだ過程を思い出せ．

5.4 初期条件

式 (76) の C_n と D_n は，時刻 $t = 0$ の弦の形と速度分布より決めることができる． $t = 0$ のときの形と速度を

$$y(x, 0) = f(x) \qquad (78)$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = v(x) \qquad (79)$$

とする．この様子を図 7 と 8 に示す．これらを初期条件という．初期の弦の形 $f(x)$ と速度分布 $v(x)$ は問題として与えられるので既知である．偏微分方程式 (64) は，初期条件以降の弦の運動を表す．

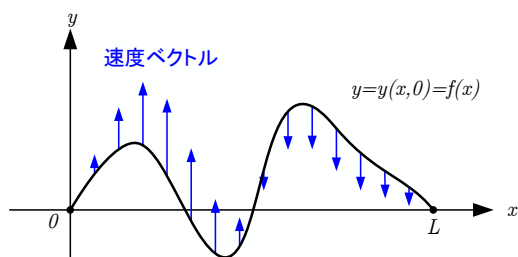


図 7: $t = 0$ の波形 $f(x)$

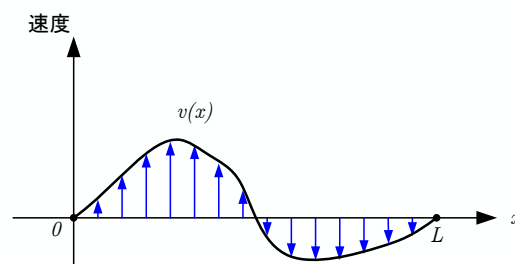


図 8: $t = 0$ の速度分布 $v(x)$

偏微分方程式の解である式 (76) が初期条件を満足するように C_n と D_n を決めれば，波動方程式が完全に解けたことになる．それらの値は，初期条件と比較することにより決めることができる．式 (76) の $t = 0$ の弦の形と速度は，

$$y(x, 0) = \sum_n C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad (80)$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = \sum_n D_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad (81)$$

となる⁵ .

解の式から求めたこれらは , 初期条件である式 (78) と (79) に等しい . だから ,

$$f(x) = \sum_n C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (82)$$

$$v(x) = \sum_n D_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (83)$$

となる . この式から , 既知である $f(x)$ と $v(x)$ を使い C_n と D_n を決めれば , 全て解けたことになる . 問題は , この式から C_n と D_n を決めることである .

ここで , C_n と D_n を求める前に , $f(x)$ と $v(x)$ の性質を考える . $f(x)$ や $v(x)$ の定義域は $[0, L]$ である . したがって , $f(x)$ や $v(x)$ はフーリエ級数 , フーリエ正弦級数 , フーリエ余弦級数などで展開できる . また , $x = 0$ と $x = L$ で弦は固定されているので ,

$$f(0) = f(L) = 0 \quad (84)$$

$$v(0) = v(L) = 0 \quad (85)$$

となる . これらのことから , $f(x)$ と $v(x)$ はフーリエ正弦級数で展開する—ことが望ましい . 係数の収束も早いし , 式 (82) や (83) との対応も良い . すなわち

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{ここで , } p_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (86)$$

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{ここで , } q_n = \frac{2}{L} \int_0^L v(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (87)$$

である .

これらの式を , 式 (82) や (83) に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_n C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (88)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_n D_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (89)$$

となる . したがって ,

$$p_n = C_n \quad q_n = D_n \frac{n\pi c}{L} \quad (90)$$

である . これから ,

$$C_n = p_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (91)$$

$$D_n = \frac{L}{n\pi c} q_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (92)$$

⁵ つぎに注意 . $\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \sum_n \frac{n\pi c}{L} \left(-C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} \right)$

と C_n と D_n を求めることができる．これで，波動方程式が境界条件や初期条件の元，完全に解けたことになる．解は，次のように書くことができる．

$$y(x, t) = \sum_n \left(p_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + \frac{Lq_n}{n\pi c} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \quad (93)$$

5.5 具体的な弦の振動

弦の初期状態を図9のようにする．弦の中央をゆっくりとつまんで，そして離す．どのように振動するであろうか？

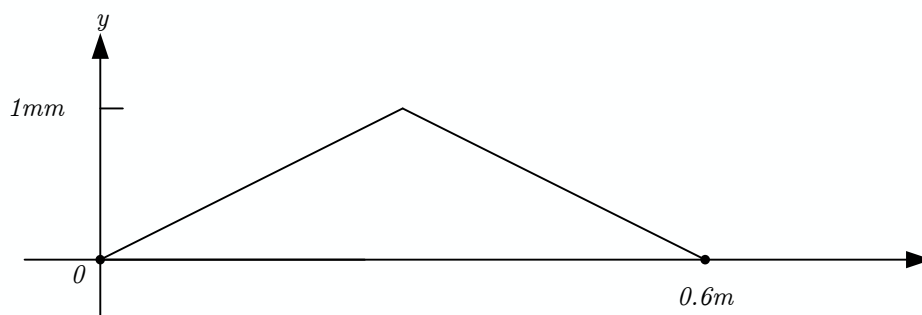


図 9: 弦の初期状態

式 (93) の p_n と q_n を決めれば，弦の振動は確定する．そのために初期条件を考えよう． $t = 0$ の時，弦の速度はどこでもゼロなので， $v(x) = 0$ である．したがって，式 (87) より，

$$q_n = 0 \quad (94)$$

となる．残りの p_n は，式 (86) を用いて計算する．弦の初期状態は

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \alpha(L-x) & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad (95)$$

と書くことができる．ここで， α は弦の傾き， L は弦の長さである．これから， p_n は，式 (86) を使うと次

のように計算できる．

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \alpha x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \alpha(L-x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \frac{2}{L} \left[-\alpha x \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^{L/2} + \frac{2\alpha}{L} \int_0^{L/2} \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
&\quad + \frac{2}{L} \left[-\alpha(L-x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_{L/2}^L - \frac{2\alpha}{L} \int_{L/2}^L \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= -\frac{\alpha L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{2\alpha}{L} \left[\frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_0^{L/2} + \frac{\alpha L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2\alpha}{L} \left[\frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_{L/2}^L \\
&= \frac{4\alpha}{L} \left(\frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\
&= \frac{4\alpha L}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}
\end{aligned} \tag{96}$$

$q_n = 0$ なので，弦の振動は，

$$y(x, t) = \sum_n \frac{4\alpha L}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} \tag{97}$$

となる． $\sin(n\pi/2)$ の項は n が偶数の場合ゼロとなる．したがって， n は奇数のみを加算すればよい．すると，

$$\begin{aligned}
y(x, t) &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{4\alpha L}{(2N-1)^2\pi^2} (-1)^{N-1} \sin \frac{(2N-1)\pi x}{L} \cos \frac{(2N-1)\pi ct}{L} \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N-1} 4\alpha L}{(2N-1)^2\pi^2} \sin \frac{(2N-1)\pi x}{L} \cos \frac{(2N-1)\pi ct}{L}
\end{aligned} \tag{98}$$

となる．これが，最初の図 9 の状態の弦の振動を表す式である．これを弦の条件

$$\alpha = \frac{1 \times 10^{-3}}{0.3} \qquad L = 0.6 \qquad \frac{\pi c}{L} = 2\pi \times 440 \tag{99}$$

を代入するとラの音がでる．位相が 30 度ごとの弦の状態を図 10～15 に示す．想像もつかないような弦の形になる．なぜ，このようなことが生じるか，物理的な理由を考えてみよ．

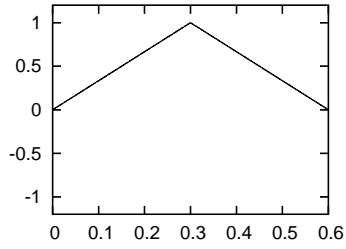


図 10: 時刻 0 [msec]

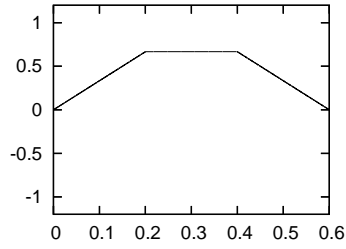


図 11: 時刻 0.18939 [msec]

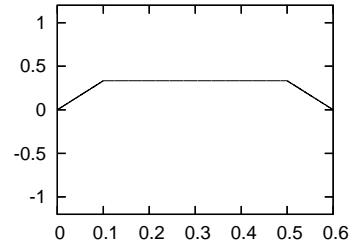


図 12: 時刻 0.37879 [msec]

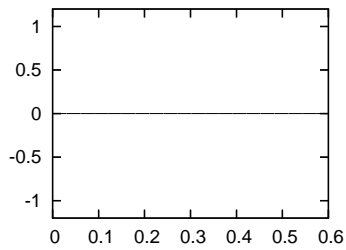


図 13: 時刻 0.56818 [msec]

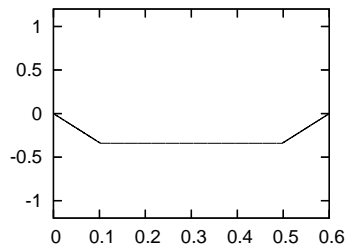


図 14: 時刻 0.75758 [msec]

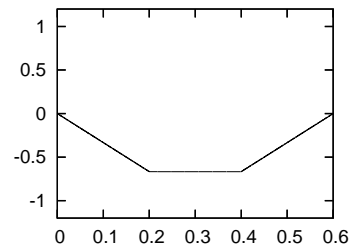


図 15: 時刻 0.94697 [msec]

参考文献

- [1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.