

学年末試験問題 (3E 電気数学)

山本昌志*

2007年3月1日

解答用紙には，計算の過程が分かるように記述すること．式のみならず，文章で考え方も記述すること．論理的に記述した解答を期待する．

フーリエ級数とフーリエ変換

以下に示す式は，解答用紙に式番号を示し，使っても良い．

フーリエ級数 $[-L, L]$ で定義された関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (1)$$

とフーリエ級数で表せる．ただし，

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (3)$$

である．

フーリエ変換 次のように，

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5)$$

フーリエ変換と逆変換を定義する．

* 国立秋田工業高等専門学校 電気情報工学科

1 基礎とパーセバルの等式

1.1 オイラーの公式

[問 1] 指数関数と三角関数の関係を示すオイラーの公式を示せ。

[問 2] オイラーの公式から, $\sin x$ と $\cos x$ を指数関数で表せ. 前問から計算すること. 答えのみの場合はゼロ点とする.

1.2 パーセバルの等式

[問 1] パーセバルの等式を導け.

2 フーリエ変換の応用

[問 1] 導関数

$$\frac{df(t)}{dt} \tag{6}$$

のフーリエ変換を導け. ただし,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \tag{7}$$

とする.

[問 2] 2 階の導関数

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \tag{8}$$

のフーリエ変換を導け.

[問 3] フーリエ変換を使い図 1 の回路の電源から見たインピーダンスを導け.

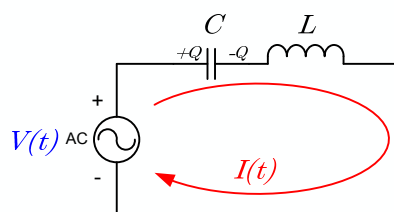


図 1: LC 直列回路

3 波動方程式

図 2 に示す弦の振動は，波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (9)$$

で記述することができる．これに関する以下の問いに答えよ．

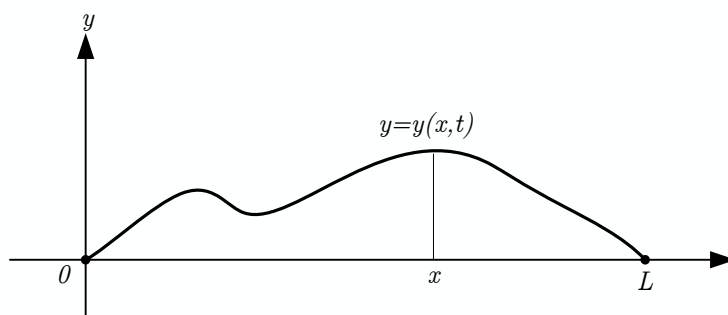


図 2: 弦の振動の様子．

- [問 1] 変数分離系を使って，式 (9) を連立の常微分方程式に直せ．
- [問 2] 前問の常微分方程式を計算し，図 2 の弦の波動方程式の一般解を示せ．
- [問 3] 弦を指でゆっくり引っ張り，図 3 の状態にする．この時の弦の変位の速度はゼロである．そして，指を離した後の弦の振動を表す式を示せ．

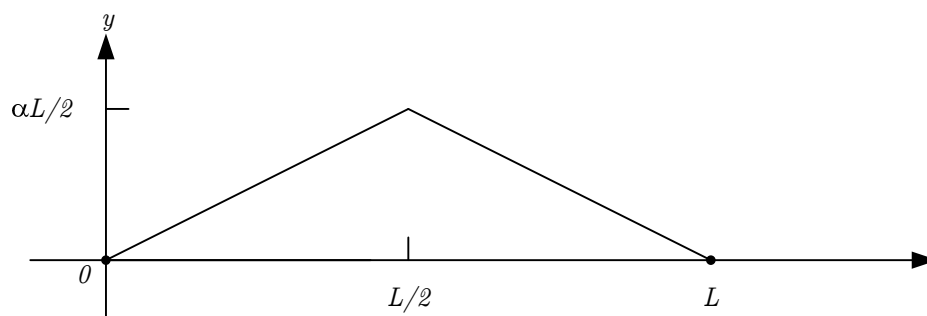


図 3: 弦の初期状態