

後期中間試験問題 (3E 電気数学)

山本昌志*

2006年12月06日

1 フーリエ級数を学ぶための基礎

1.1 オイラーの公式

[問1] 指数関数と三角関数の関係を示すオイラーの公式を示せ.

[問2] オイラーの公式から, $\sin x$ と $\cos x$ を指数関数で表せ. 前問から計算すること. 答えのみの場合はゼロ点とする.

1.2 直交関数系

フーリエ級数を考える場合, 次の関係は重要である. ただし, m と n は自然数とする.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 \quad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (5)$$

[問1] 式(2)の等式を計算して示せ. ただし, 計算過程は全て漏らさず一配布したプリントよりも詳細一に, 書くこと.

*国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

2 フーリエ級数

関数 $f(x)$ は x のすべての実数について定義されていて，周期 2π をもつものとする．この $f(x)$ が，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned}$$

のように三角関数で展開できるものとする．これをフーリエ級数と言う．以下の問いに答えよ．

注意

計算方法や仮定は文章で示し，計算過程は全て漏らさずに記述すること．ただし，問題用紙に書かれている式 (1)~(5) は式番号を示し，そのまま使用してもよい．

[問 1] フーリエ係数 a_0 と a_n , b_n の計算式を求めよ．

[問 2] 前問の結果を利用して，図 1 に示す周期関数のフーリエ級数を計算せよ．

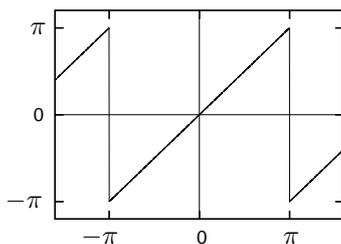


図 1: 周期 2π ののこぎり波

3 最良近似としてのフーリエ級数

区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ を次の関数

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

で近似する. $a_k (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$ と $b_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ を適当に選んで, 二乗平均誤差を最小にすることを考える. 以下の問に答えよ.

注意

計算方法や仮定は文章で示し, 計算過程は全て漏らさずに記述すること. ただし, 問題用紙に書かれている式 (1)~(5) は式番号を示し, そのまま使用してもよい.

[問 1] 関数 $f(x)$ を関数 $S_n(x)$ で近似する場合の二乗平均後差の定義式を示せ.

[問 2] a_0 と a_k, b_k の計算式を求めよ. ここには, 以下の記述が必要である.

- ・ 二乗平均誤差を最小にする方法
- ・ 二乗平均誤差が最小になる a_0 と a_k, b_k の計算

[問 3] 二乗平均後差を最小にする a_0 と a_k, b_k はフーリエ級数の係数とどのような関係になっているか?. 前問と「2 フーリエ級数」の問 1 の計算結果から考察せよ.