

# フーリエ級数(周期 $2L$ )

山本昌志\*

2006年11月7日

## 概要

周期 $2L$ の任意の関数のフーリエ級数を学習する。また、偶関数と奇関数の性質を復習し、フーリエ余弦級数と正弦級数を学ぶ。

## 1 本日の学習内容

本日の内容は、教科書 [1] の p.225–227 ページである。ここでは、周期 $2L$ の任意の関数 $f(x)$ を三角関数で展開することを学習する。また、関数 $f(x)$ に、偶関数や奇関数といった対称性がある場合のフーリエ級数を学習する。

本日の学習の目標は、つぎのとおりである。

- 周期 $2\pi$ のフーリエ級数を周期 $2L$ へ拡張する方法が分かる。
- 偶関数と奇関数の性質が分かる。
- フーリエ余弦級数と正弦級数が分かる。

## 2 周期 $2L$ の周期関数のフーリエ級数

前回、周期 $2\pi$ のフーリエ級数を学習した。ここでは、さらに一般化し、任意の周期 $2L$ の場合のフーリエ級数を求める。せっかくなので、前回の周期 $2\pi$ のフーリエ級数を利用することにする。周期 $2\pi$ の関数 $f(x)$ は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{ただし, } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

とフーリエ級数で表せる。これを、任意の周期 $2L$ に拡張する。

図1のような周期 $2L$ の関数 $g(x)$ を考える。この関数の横軸を $\pi/L$ 倍すると、図2のような周期 $2\pi$ の関数 $f(x)$ ができあがる。したがって、この $f(x)$ は式(1)のようにフーリエ級数で表すことができる。

\* 国立秋田工業高等専門学校 電気情報工学科

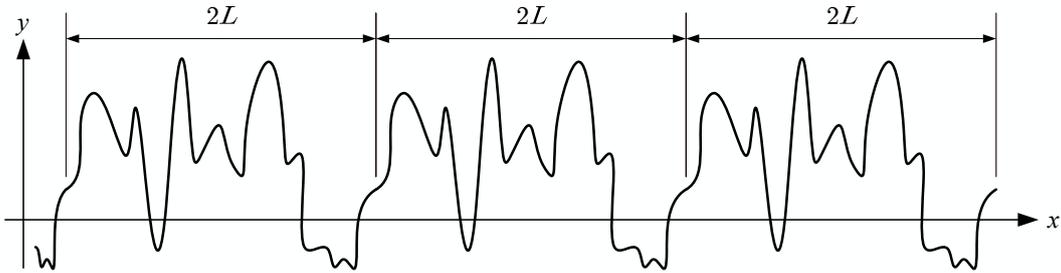


図 1:  $2L$  を周期とする関数  $g(x)$

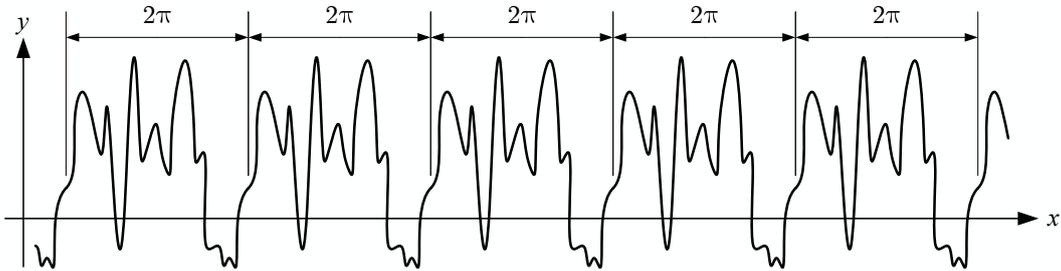


図 2: 周期  $2L$  の関数  $g(x)$  の  $x$  軸を圧縮して作成した  $2\pi$  を周期とする関数  $f(x)$

ところで、関数の横軸を  $\pi/L$  倍するということはどういうことであろうか? . 図からも分かるように、次の関係

$$f(x) = g\left(\frac{Lx}{\pi}\right) \quad (2)$$

が成り立つことに他ならない。直感的に理解できない—というならば、 $x = 2\pi$  としてみよ。  $f(2\pi) = g(2L)$  となることが分かる。

ここで、 $f(x)$  は  $2\pi$  の周期関数なので、式 (1) のようにフーリエ級数で表すことができる。一方で、関数  $g$  と  $f$  は式 (2) の関係がある。ゆえに、

$$g\left(\frac{Lx}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \quad (3)$$

$$\text{ただし, } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g\left(\frac{Lx}{\pi}\right) \cos nx \, dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g\left(\frac{Lx}{\pi}\right) \sin nx \, dx$$

となる．ここで， $X = Lx/\pi$  と変数変換する．すると，

$$g(X) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi X}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi X}{L} + a_3 \cos \frac{3\pi X}{L} + \cdots + b_1 \sin \frac{\pi X}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi X}{L} + b_3 \sin \frac{3\pi X}{L} + \cdots \quad (4)$$

$$\text{ただし， } a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(X) \cos \frac{n\pi X}{L} dX \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(X) \sin \frac{n\pi X}{L} dX$$

が得られる．これを，形式的に  $X \Rightarrow x$  と置き換えてもよい．すると，

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + a_3 \cos \frac{3\pi x}{L} + \cdots + b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + b_3 \sin \frac{3\pi x}{L} + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{ただし， } a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

となる．これが，任意の周期  $2L$  をもつ関数のフーリエ級数である．

### 3 フーリエ余弦級数とフーリエ正弦級数

#### 3.1 偶関数と奇関数

関数の対称性を考えると，フーリエ係数を求める積分が容易になることがある．ここでは，関数の対称性として，偶関数と奇関数を考える．

$f(-x) = f(x)$  ならば偶関数 (even function)， $f(-x) = -f(x)$  ならば奇関数 (odd function) であるという．図 3 や 4 に示すように，偶関数は  $y$  軸について対称，奇関数は原点について対称になる．諸君が知っている関数では，次のようなものがある．

偶関数の例

$$\cdots, x^{-4}, x^{-2}, 1, x^2, x^4, \cdots \quad \cos x \quad \cosh x \quad \cdots, f(x^{-2}), f(x^2), f(x^4), \cdots$$

奇関数の例

$$\cdots, x^{-3}, x^{-1}, x, x^3, \cdots \quad \sin x \quad \tan x \quad \arcsin x \quad \arctan x \quad \sinh x \quad \tanh x$$

どちらでもない

$$\arccos x \quad e^x \quad \log x$$

偶関数，奇関数の名前の由来???． $x^n$  の関数を考えれば，偶関数および奇関数のそれが理解できる． $n$  が偶数の時偶関数，奇数のとき奇関数になる．そうして，

- $x^2$  の場合， $n = 2$  は偶数；偶関数となる． $f(-x) = f(x)$  の関係があり  $y$  軸に対称である．
- $x^3$  の場合， $n = 3$  は奇数；奇関数となる． $f(-x) = -f(x)$  の関係があり原点に対称である．

ということが分かる．

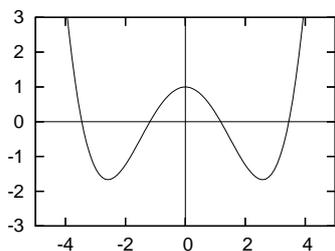


図 3: 偶関数

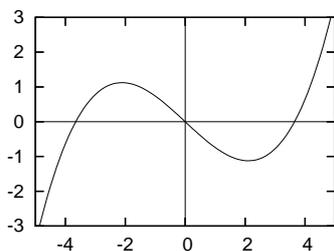


図 4: 奇関数

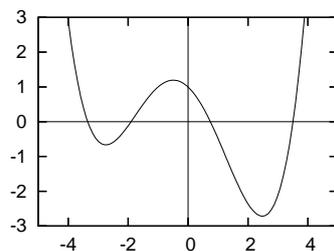


図 5: どちらでもない

関数同志の演算に関して、次のような関係がある。偶関数であれば  $f(-x) = f(x)$ 、奇関数であれば  $f(-x) = -f(x)$  から、これは容易に理解できる。

偶 + 偶 $\Rightarrow$ 偶	偶 - 偶 $\Rightarrow$ 偶	偶 $\times$ 偶 $\Rightarrow$ 偶	偶/偶 $\Rightarrow$ 偶
奇 + 奇 $\Rightarrow$ 奇	奇 - 奇 $\Rightarrow$ 奇	奇 $\times$ 奇 $\Rightarrow$ 偶	奇/奇 $\Rightarrow$ 偶
偶 + 奇 $\Rightarrow$ どちらでもない	偶 - 奇 $\Rightarrow$ どちらでもない	偶 $\times$ 奇 $\Rightarrow$ 奇	偶/奇 $\Rightarrow$ 奇

さらに、対称性より次の積分の関係も得られる。積分は  $x$  軸との面積になる—ということから、これも容易に分かる。

$$\int_{-a}^a \text{偶関数} dx = 2 \int_0^a \text{偶関数} dx \qquad \int_{-a}^a \text{奇関数} dx = 0 \qquad (6)$$

### 3.2 偶関数と奇関数のフーリエ級数

偶関数あるいは奇関数の周期関数は、しばしば出会う。このような場合、フーリエ級数は少しだけ簡単になる。

周期  $2L$  の関数  $f(x)$  のフーリエ級数は式 (5) から計算することができる。ここで、 $f(x)$  が偶関数あるいは奇関数の場合を考える。フーリエ係数  $a_n$  と  $b_n$  は、つぎの積分より求めることができる。

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (7)$$

もし、 $f(x)$  が偶関数であれば、

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \qquad b_n = 0 \qquad (8)$$

となる。なぜならば、被積分関数  $f(x) \cos(n\pi x/L)$  は偶関数、 $f(x) \sin(n\pi x/L)$  は奇関数となり、 $y$  軸に対して対称と反対称になるからである。一方、 $f(x)$  が奇関数であれば、

$$a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad (9)$$

となる。これらをまとめると、次の結果が得られる。

### フーリエ余弦級数と正弦級数

- 周期関数が偶関数の場合

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (10)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

これをフーリエ余弦級数と呼ぶ。

- 周期関数が奇関数の場合

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (11)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

これをフーリエ正弦級数と呼ぶ。

ここで、ちょっと余談であるが、面白いことを述べよう。対称性の無い関数  $f(x)$  は、式 (5) のようにフーリエ級数で表すことができる。この式の右辺は、偶関数であるフーリエ余弦級数と奇関数であるフーリエ正弦級数の和になっている。このことは、対称性のない周期関数であろうとも、偶関数と奇関数に分解できることを示している。すなわち、

$$\text{任意の周期関数} = \text{偶関数の周期関数} + \text{奇関数の周期関数} \quad (12)$$

である。

## 4 課題

### 4.1 レポート提出要領

期限	11月14日(火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK. 講義終了後はダメ)
用紙	A4のレポート用紙. 左上をホッチキスで綴じて, 提出のこと.
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること. 授業科目名「電気数学」 課題名「課題 フーリエ級数(周期 $2L$ )」 提出日 3E 学籍番号 氏名
内容	2ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること.

### 4.2 課題内容

以下の問題では, 計算過程は省略しないで全て書くこと.

- [問 1] 教科書 [1] の p.226 の例題 3  
[問 2] 教科書 [1] の p.237 の演習問題 IV-I[A] の 1

### 4.3 小テスト

次回の授業のはじめに小テストを行う. 以下の問題が 10 分以内に書けるように練習すること.

- 教科書 [1] の p.226 の例題 3

## 参考文献

- [1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論(新版). 裳華房, 2000.