静電場(その2)

山本昌志*

2005年6月10日

1 本日の授業内容

本日は、先週に引き続き静電場の話をする。先週までに、ガウスの法則の積分形が終わったので、その微分形の話かは進める。本日の講義内容は以下の通りである。

- ガウスの法則 (微分形)
- 静電ポテンシャル
- 静電ポテンシャルとポアッソン方程式
- コンデンサーと静磁場のエネルギー

2 ガウスの法則 (微分形)

先週の講義で学習したように、積分型のガウスの法則は、

$$\int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_V \rho\mathrm{d}V \tag{1}$$

である。ここで、ρ は電荷密度、$\boldsymbol{D}$ は電束密度というベクトル場である。電束密度は誘電率 ε を介して電場 $\boldsymbol{E}$ と

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{2}$$

の関係で結ばれている。誘電率は空間の電気的な性質を決める定数だと思えば良い。この積分型のガウスの法則では、閉じた空間の表面の電場とその中の電荷の関係を述べており、近接作用の考え方の式とは言い難い。そこで、この式を利用して、微分型のガウスの法則を導き出して、完全な近接作用の式に直すことを考える。

ベクトル解析の学習で、任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ で成立するガウスの発散定理

$$\int_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V \tag{3}$$

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

を示した。これを使って、微分形のガウスの法則を導き出すことにする。これを、式 (1) の左辺適用すると、

$$\int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V \tag{4}$$

となる。これから、積分型のガウスの法則は、

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V = \int_V \rho\mathrm{d}V \tag{5}$$

となる。右辺と左辺の積分領域は同じで、この関係は任意の場所で成立している。この積分の値がいかなる時も、どこでも成立するためには、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho \tag{6}$$

でなくてはならない。これが、ガウスの法則の微分形である。これで、完全に近接作用の式になった。

これまで、3 つの方法で電場 $\boldsymbol{E}$ を表してきた。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \qquad \text{クーロンの法則の拡張} \tag{7}$$

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho\mathrm{d}V \qquad \text{積分形のガウスの法則} \tag{8}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \text{微分形のガウスの法則} \tag{9}$$

問題に応じて、計算しやすい式を使えば良い。

それでは、いつでもこれらの式は正しいのであろうか?。静電場の問題を考える場合、どれも正しい。しかし、電荷が動く場合、式 (7) や (8) は間違いである。これらの式では電荷が変化したことによる、離れたところの電場の変化は時間がゼロで伝わる。実験の結果、そのようなことは生じず、光速でそれが伝わることが知られている。完全な近接作用を表す式 (9) のみが有限の時間で電場の変化を伝えることができ、いつでも正しい結果を与える。ただ、この式だけで、光速に伝わることを示すには不可能でまだ式が不足している。今後、それについては、学習する。

教科書の式 (2.34) は、怪しそう。特別な場合にしか成り立たない。

3　静電ポテンシャル

3.1　回転

発散と回転を決めれば、ベクトル場は一意に決まると、以前述べた。微分型のガウスの法則の式 (9) は、電場の発散を表している。従って、回転が分かれば、電場を記述する方程式の完全なセットが得られることになる。そこで、、電場の回転がどうなっているか考える。

回転を考えるために、電場の線積分を考える。図 1 の場合の二つの積分経路 A と B の積分を考えると。電場の線積分の結果は、どちらも同じ値になる。それは、

$$\begin{aligned}\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \int_{r_1}^{r_2}\frac{Q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon r^2}\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

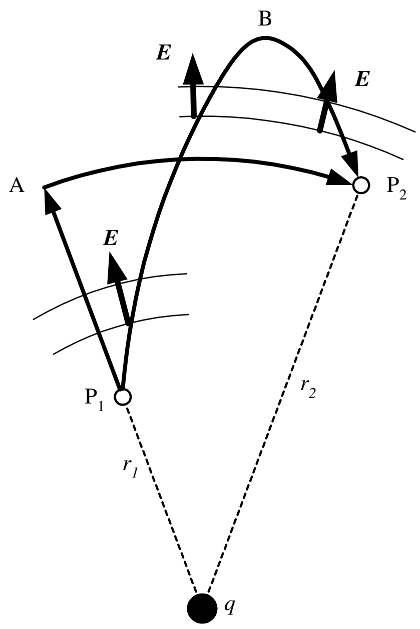

図 1: 道筋 A と B での電場の線積分の比較

である。どのような経路をとっても、その電場の線積分はスタート点とゴール点で決まる。

この積分はなにを表すか?、少し考えよう。電荷 q が電場 $\boldsymbol{E}$ の中に置かれたとき $q\boldsymbol{E}$ の力を受ける。従って、$q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は電場が電荷 q にする仕事量になる。このことから、式 (10) は電荷 q を乗じた量は、電場の仕事量

$$\begin{aligned} W &= q\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

になる。当然、これも積分経路に依存しない量になる。これは、ちょうど、重力場における位置エネルギーの関係と同じである。電荷が重力場での質量になり、高さが

$$h = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r} \tag{12}$$

に相当する。これは、ポテンシャルと呼ばれる量で、ϕ で表される。図 2 にその様子を示す。

1 つ電荷ではなくて、もっとたくさんの電荷がある場合、電場はそのベクトル和、$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+\cdots$ となる。したがって、電場の線積分は、それぞれの線積分

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \int_{P_1}^{P_2}(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+\cdots)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\ &= \int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}+\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}+\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}+\cdots \end{aligned} \tag{13}$$

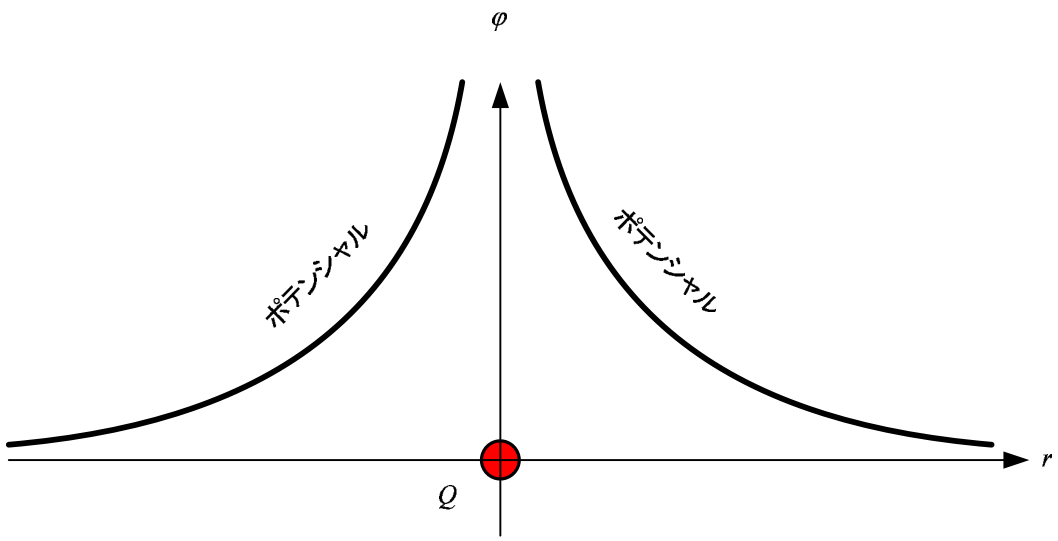

図 2: 電荷 Q によるポテンシャル

となる。各々の電荷のつくる電場の線積分は、道筋に依存しないのは先ほど述べたとおりである。したがって、多くの電荷がある場合、これは任意の静電場に相当、その線積分は道筋に依存しないと結論できる。

このことから、また別の結論も引き出せる。任意の閉曲線の沿った線積分

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0 \tag{14}$$

となる。したがって、静電場の回転は

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= \lim_{S \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{S} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

となる。

以上より、静電場の発散を表す式 (9) と回転を示す式 (15) を示すことができた。これで、発散と回転が分かったので、これで静電場は決まる。

3.2 スカラーポテンシャル (電圧)

静電場ではその回転はゼロである。ベクトル解析によれば、恒にスカラー場の勾配の回転はゼロなので、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \phi(\boldsymbol{r}) \tag{16}$$

となる、スカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ があるはずである。あるいは、式 (10) のように積分の経路に依存しないスカラー量 ϕ という量を決めることができる。

$$\phi(\boldsymbol{r}_2) - \phi(\boldsymbol{r}_1) = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{17}$$

このスカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ のことをポテンシャルと言う。ポテンシャルの定義式 (16) を積分したら得られる。聞きなれた言葉で言うと、電圧のことである。重力場での高さと同じ役割を果たすことは、先に述べたとおりである。

次に、位置の関数としてのポテンシャルを決めたい。一般にポテンシャルの値に、任意の定数を足し合わせても、その電場の大きさは変わらない。定数は微分 (勾配) すると、ゼロになるからである。ポテンシャルで重要な意味を持つものは、その差である。どこかに基準を置いて、そこからの差でポテンシャルの大きさを定義する。ようするに、山の高さは海面を基準にするのと同じである。あるいは、電気回路において、どこかにアース電位 (0V) を決めるのと同じである。基準を変えても、物理法則は何も変わらないことに注意が必要である。

通常、無限遠点をポテンシャルの基準とする。すると、

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= -\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\ &= -\int_{\mathrm{inf}}^{r} \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}\end{aligned} \tag{18}$$

となる。これで、点電荷 Q が原点にあるときのポテンシャル $\phi(r)$ が決められた。$r\to\infty$ とするとそのポテンシャルはゼロとなる。要するに、無限遠点のポテンシャルがゼロになるように基準が決められたのである。

もっと一般的に書くと、ポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q(\boldsymbol{r_0})}{4\pi\varepsilon|r-r_0|} \tag{19}$$

となる。

4 静電ポテンシャルとポアッソン方程式

電場 $\boldsymbol{E}$ は、発散を表す式 (9) と回転を示す式 (15) の微分方程式を解けば計算できるが、大変である。一般にベクトルの方程式を計算するのは大変である。一方、スカラー場 ϕ を計算し、その勾配から電場を計算するのは比較的簡単である。

それでは、スカラー場が満たす方程式を考えよう。スカラー場の勾配が電場、$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$ となる。また、電場の発散が電荷密度、$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$ である。したがって、

$$\nabla\cdot(-\nabla\phi) = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{20}$$

となり、スカラーポテンシャルは

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon} \tag{21}$$

となる。この式を「ポアソン方程式」と言う。また、領域に電荷がない場合、

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{22}$$

となり、この式を「ラプラス方程式」と言う。静電場の場合、一般的にはポアソン方程式で、電荷が無い特別な場合「ラプラス方程式」となる。

ポアソン方程式 (21) は、スカラーの方程式なので解きやすい。解きやすいといっても、これを直接計算するのは、そんなに易しいことではない。そこで、直感的にこの微分方程式の解 (ポテンシャル) を求めることにする。電荷が点電荷の場合のこの微分方程式のポテンシャルは、すでに分かっており、式 (19) のとおりである。

次に複数の点電荷がつくるポテンシャルを考える。この場合、電場は重ね合わせの原理が成り立つので、

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_i \frac{q_i(\boldsymbol{r_i})}{|r-r_i|} \tag{23}$$

となる。ここで、不連続な点電荷 q_i を連続的な電荷密度 ρ に置き換えると、和は積分に置き換わる。従って、

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r'})}{|r-r'|}\mathrm{d}V' \tag{24}$$

となる。これが、ポアソン方程式 (21) の解である。無限遠を基準 ($\phi = 0$) としたときの任意の場所のポテンシャルを示す。

ポテンシャルが分かるとなにがうれしいか?。それは、ポテンシャルはそれだけでも電圧という物理的な意味がある。それだけでもうれしいが、それを微分することにより電場も求められるのである。ポテンシャルが分かると静電場の問題は解けたと言える。

5　コンデンサーと静磁場のエネルギー

5.1　導体表面の電荷分布

図 3 のように絶縁体の棒を帯電させて、金属球に近づけると、クーロン力により金属中の自由電子は移動し、その結果、電荷分布の偏りが生じる。この場合、金属中の電場がゼロになるように、自由電子はとても早く移動する。もし、電場がゼロでないとすると、その作用により自由電子は電場をゼロにするように移動する。すなわち、電場がゼロになるまで電子は移動し続けるのである。この電場がゼロという状態は、外部の帯電させた絶縁体が作る電場と金属内の自由電子が作る電場をあわせてゼロということである。すなわち、金属内の自由電子は、外部からの電場をキャンセルするように移動するのである。

内部の電場の状態は分かった。金属の表面ではどうなるか?。金属の表面での接線方向の電場はゼロになる。もし、接線方向に電場があると、ここでも電子はそれをゼロにするように移動する。従って、接線方向の電場はゼロにならなくてはならない。従って、金属の表面では電場は法線方向のみとなる。金属から電子が飛び出さないのは、また別の力が働くからである。

金属の表面の法線方向の電場は、積分系のガウスの法則から導くことができる。金属表面の法線方向の電場を E_n とする。金属内部には電場はないので、この法線方向の電場は外側のみにある。そして、金属表面の電荷密度を σ とする。ここで、表面の微少面積 δS を考えると、ガウスの法則は、

$$E_n\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon} \tag{25}$$

となる。従って、

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{26}$$

である。これが、表面電荷密度と表面の電場の関係である。

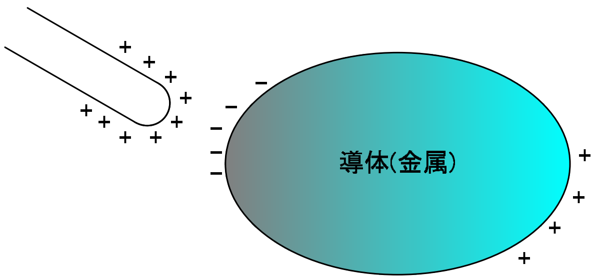

図 3: 静電誘導

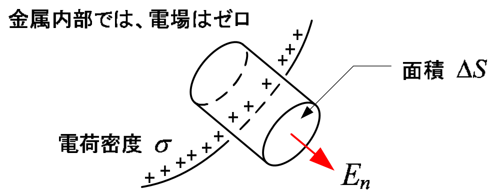

図 4: 表面にガウスの法則 (積分形) を適用

コーヒーブレイク

余談であるが、金属が光沢があるのは、この自由電子の作用である。光の電場が金属内に入り込もうとすると、自由電子は非常に早く移動して、それを阻止する。光の電場と同期して、電子が移動することになる。その移動により新たに電場がつくられ、入射光と反対方向に電磁波 (光) を放射する事になる。これが反射光となり、金属は光沢を持つのである。一般に光るものは、自由電子がふんだんにあり、電気を通しやすい。
さらにこの自由電子は熱を伝える働きもする。金属の熱伝導率が高いのも、大量に自由電子があるからである。熱と光と全く異なった現象であるが、同じ自由電子が関与しているのはおもしろいことである。

5.2 コンデンサー

2 つの導体を近づけて、各々に導線を接続させるとコンデンサーができあがる (図 5)。2 つの金属に正負が反対で等量の電荷 ($+Q$ と $-Q$) を与えたとする。このとき、両導体の間の電圧

$$V = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{27}$$

は積分の経路によらない。2 つの間の空間で、この積分が経路によらないのは以前示したとおりである。加えて、金属表面の接線方向にも電場が無い。従って、この積分 (電圧) は経路に依存しない。諸君は、これまでの学習や実験で電圧は経路によらないことは十分承知しているはずである。

また、電荷の分布の形が変わらなければ、電圧は電荷量に比例する。重ね合わせの原理が成り立つからである。従って、次のような量

$$C = \frac{Q}{V} \tag{28}$$

が定義できるはずである。この C は静電容量と呼ばれ、2 つの導体の形状と、その間の媒質の誘電率で決まる。

ここで、実際のコンデンサーの容量を求めてみよう。問題を簡単にするために、図 6 の平行平板コンデンサーを考える。下側の導体には $+Q$ が、上側には $-Q$ の電荷があるとする。通常、コンデンサーでは、導体間隔 (x 方向) に比べて、水平方向 (y,z 方向) には十分広い。そして、一様に電荷は分布している。そのため、電場は、$(E_x, 0, 0)$ と考えることができる。また、導体の間の空間では、ガウスの法則が成り立つので[1]、E_x は至る所で同じ値になる。その値は、式 (26) より、

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma}{\varepsilon} \\ &= \frac{Q}{\varepsilon S} \end{aligned} \tag{29}$$

となる。ここで、S は導体の面積である。

電圧は、これを積分すれば良いので、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^d \frac{Q}{\varepsilon S}\mathrm{d}x \\ &= \frac{Qd}{\varepsilon S} \end{aligned} \tag{30}$$

となる。したがって、平行平板コンデンサーの容量は式 (28) から、

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \tag{31}$$

となる。これは、よく知られた式である。大きな容量のコンデンサーを作るためには、導体の間隔 d を小さく、その面積 S は広く、誘電率 ε の大きな媒質を使うことになる。

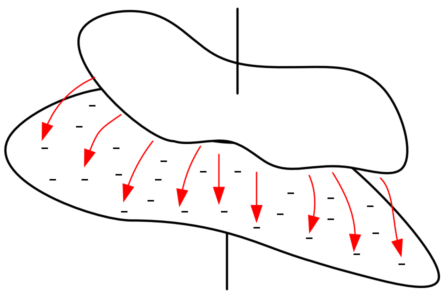

図 5: 2 つの金属プレートによるコンデンサー

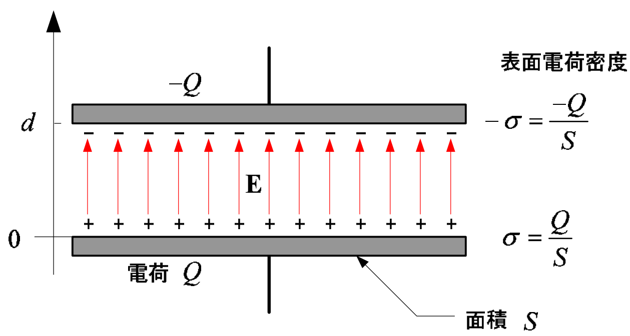

図 6: 平行平板コンデンサー

5.3 コンデンサーに蓄えられるエネルギー

コンデンサーの両電極に $+Q$ と $-Q$ を蓄えるためには、どれだけの仕事が必要が考えよう。電極に $-q$ と $+q$ が貯まっていた場合を考える。上の電極から、$\mathrm{d}q$ の電荷と取り、それを下の電極に移動させることを考

[1] 微分形のガウスの法則を考えよ。

える。電極間には電場があるため、それから受ける力に抗して、電荷を移動させなくてはならない。その抗力と反対の外力により、電荷を移動させることになるが、それがする仕事 (力 $\times$ 距離)$\mathrm{d}W$ は、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= -\mathrm{d}q\int_d^0 E_x \mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{d}q\int_d^0 \frac{q}{\varepsilon S}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{d}q\frac{qd}{\varepsilon S} \\
&\qquad (C = \varepsilon S/d \text{ なので}) \\
&= \frac{q}{C}\mathrm{d}q
\end{aligned} \tag{32}
$$

となる。

コンデンサーの両電極に $+Q$ と $-Q$ を蓄えるために必要な外部からの仕事の総量は、式 (32) を 0〜Q まで積分する事により求められる。仕事の総量は、

$$
\begin{aligned}
W &= \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q \\
&= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}
\end{aligned} \tag{33}
$$

である。外部からの仕事は、コンデンサーの内部にエネルギーとして蓄えられる。両電極にモーターを接続すると、それを回すことができ、蓄えられたエネルギーを取り出すことができる。コンデンサーに蓄えられたエネルギーは静電エネルギー U_e と言い、これを

$$
U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{34}
$$

のように記述する。これは、式 (28) を用いて

$$
U_e = \frac{1}{2}CV^2 \tag{35}
$$

と書かれるのが普通である。これで、コンデンサーをある電圧で充電したとき、そこに蓄えられているエネルギーが計算できる。

コンデンサーに関して、電気技術者は

$Q = CV$	容量の定義
$C = \dfrac{\varepsilon S}{d}$	容量の計算方法
$U = \dfrac{1}{2}CV^2$	蓄積エネルギー

暗記している。

5.4 静電場のエネルギー

コンデンサーのエネルギーはどこに蓄えられているのであろうか?。近接作用の考え方 (場の考え方) を取り入れると、それは両電極の空間に静電エネルギーあると考える。それでは、コンデンサーの蓄積エネルギーを場の式に直してみよう。そのために、電場を式 (26) を用いて、

$$E = \frac{Q}{\varepsilon S} \tag{36}$$

と書き換えておく。これと、コンデンサーの容量の式 (31) を用いると、蓄積エネルギーは、

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2}CV^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{\epsilon S}(\varepsilon S E)^2 \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S d \\ &= \int \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{37}$$

と書き換えられる。

これから、コンデンサー内部でのエネルギー密度は $1/2\varepsilon E^2$ と考えても良いだろう。これは、一般化できて、電場のエネルギー密度 w は

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2 \tag{38}$$

と計算できる。この式は、時間的に変化する場でも適用できる。

6 課題

[**問題 1**] 教科書　p.43 の練習問題 (2)(3)(4)

6.1 レポート 提出要領

提出方法は、次の通りとする。

期限	6 月 17 日 (木)PM1:00 まで
用紙	A4
提出場所	山本研究室の入口のポスト、または講義開始時に手渡し
表紙	表紙を 1 枚つけて、以下の項目を分かりやすく記述すること。
	授業科目名「電磁気学特論」
	課題名「課題　ガウスの定理 (静電場)」
	生産システム工学専攻　学籍番号　氏名
	提出日
内容	問題の解答。計算課程をきちんと書くこと。