

ベクトル解析⁵(グリーンの定理と応用)

山本昌志*

2005年5月27日

1 先週の復習と本日の授業内容

1.1 先週の復習

ベクトル場やスカラー場の積分についてのべた。

1.2 本日の授業内容

本日は、グリーンの定理とその応用について述べる。そして、残った時間でベクトル解析の練習問題を解いてもらう。

2 1変数関数の部分積分

グリーンの定理は、部分積分の公式に似ている。部分積分は、関数の積の微分

$$\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg' \quad (1)$$

から導ける。両辺を積分し、順番を入れ替えると

$$\int f'g dx = fg - \int fg' dx \quad (2)$$

となり、部分積分の公式が導かれた。

*国立秋田工業高等専門学校 生産システム工学専攻

3 グリーンの定理

定理 3.1 (グリーンの定理)

スカラー場 $f(x, y, z)$ と $g(x, y, z)$ があるとする。この領域内の閉じた任意の部分を V とする。そして、この V の境界面を S とする。すると、以下が成り立つ。

$$\int_V (\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g) dV = \int_S f \nabla g \cdot \mathbf{n} dS \quad (3)$$

$$\int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \int_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4)$$

これをグリーンの定理という

ベクトル解析の恒等式

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g \quad (5)$$

の両辺を体積積分する。左辺にはガウスの定理を用いると、

$$\int_S f \nabla g \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g) dV \quad (6)$$

である。これで、式 (3) が証明できた。

式 (5) と、これの f と g を入れ替えたの辺々を引き算すると、

$$\nabla \cdot (f \nabla g - g \nabla f) = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f \quad (7)$$

となる。同じように体積積分をしてガウスの定理を使うと、式 (4) を得ることができる。

グリーンの定理は、

$$\nabla f \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial n} \quad (8)$$

として、

$$\int_V (\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g) dV = \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS \quad (9)$$

$$\int_V (g \nabla^2 g - f \nabla^2 f) dV = \int_S \left(g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) dS \quad (10)$$

と書かれる場合もある。

4 ヘルムホルツの定理

4.1 定理 1

定理 4.1

任意の領域のベクトル場は、その内部で発散と回転を与え、そして領域の境界での法線方向の成分を与えれば、一意に決まる。

この定理は、発散と回転と境界条件を決めればベクトル場が決まると言っている。これは、次のようにして証明できる。発散 $\rho(x, y, z)$ と回転 $j(x, y, z)$ とした場合

$$\nabla \cdot V_1 = \rho \quad (11)$$

$$\nabla \times V_1 = j \quad (12)$$

とする。問題は、この発散 $\rho(x, y, z)$ と回転 $j(x, y, z)$ を与えた場合、ベクトル場が一意に決まるかということである。

V_1 と同一の境界条件で式 (11) と (12) を満たす他のベクトル場 V_2 があるとする。ここで、 $V_1 - V_2$ がゼロならば、ベクトル場は一意に決まると言える。これらの式を満たすベクトル場は無いと言えるからである。そこで、

$$W = V_1 - V_2 \quad (13)$$

とおく。このベクトル場 W の発散は、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot W &= \nabla \cdot V_1 - \nabla \cdot V_2 \\ &= \rho - \rho \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

である。すなわち、ベクトル場 W は湧き出しが無い。また、ベクトル場 W の回転は、

$$\begin{aligned} \nabla \times W &= \nabla \times V_1 - \nabla \times V_2 \\ &= j - j \\ &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

となる。すなわち、ベクトル場 W には回転が無い。ベクトル場 W は回転がないので、

$$W = -\nabla\phi \quad (16)$$

とスカラー場を用いて記述ができる。ベクトル場 W には湧き出しが無い ($\nabla \cdot W = 0$) ことから、

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (17)$$

である。

これで準備が整った。 W が考えている空間 V にわたってゼロであることを証明したい。そのためには、

$$\int_V W \cdot W dV = 0 \quad (18)$$

が言えればよい。 $W \cdot W$ はベクトル W の大きさの2乗で必ずゼロ以上である¹。従って、その積分がゼロとなるためには、いたるところで $W \cdot W$ がゼロとならなくてはならない。従って、 W が積分区間で全てゼロの場合のみ、式 (18) が成り立つ。

¹ W が複素ベクトルの場合は、 $W \cdot W^*$ となり、ゼロ以上である。 W^* は複素共役を表す。

与えられた条件で式 (18) の右辺を計算して、それがゼロになることを確認する。取り合えず、左辺に分かっている条件を入れて計算してみよう。

$$\begin{aligned}
 \int_V \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} dV &= \int (-\nabla\phi) \cdot (-\nabla\phi) dV \\
 &= \int \nabla\phi \cdot \nabla\phi dV \\
 &\quad \text{グリーンの公式の (4) から} \\
 &= \int_S \phi \nabla\phi \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \phi \nabla^2 \phi dV \\
 &\quad \text{式 (16) と (17) から} \\
 &= - \int_S \phi \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS \\
 &= - \int_S \phi (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \cdot \mathbf{n} dS \\
 &= - \int_S \phi (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}) dS \\
 &\quad \text{法線方向の値が等しければ} \\
 &= 0 \tag{19}
 \end{aligned}$$

となる。従って、定理が証明できた。

この定理のなにがうれしいかというと、ベクトル場を記述する微分方程式は、回転と発散で良いということを示していることである。いろいろな法則は微分方程式で記述しなくてはならないが、ベクトル場の場合は回転と発散の値を決めれば、ベクトル場が決まると言うことである。境界条件は必要であることは言うまでもない。

4.2 ヘルムホルツの定理

定理 4.2

空間内部で、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ のようなベクトル場があるとする。そのベクトル場は、スカラー場の勾配 $\nabla\phi$ とベクトル場の回転 $\nabla \times \mathbf{B}$ に分解できる。

$$\mathbf{A} = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{B} \tag{20}$$

この証明までの時間がないので、興味ある諸君は調べよ。ポテンシャルの話をするときにこれは重要な定理である。