

# ベクトル解析 4(スカラー場とベクトル場の積分)

山本昌志\*

2005年5月20日

## 1 先週の復習と本日の授業内容

### 1.1 先週の復習

先週は、ベクトル場の微分について説明した。そこで、重要な結論は、次の通りであった。

- 微分演算子

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1)$$

はベクトルのように振る舞う。

- この微分演算子は、スカラー場とベクトル場に作用する。

$$\text{勾配: スカラー場に作用してベクトル場を作る} \quad \nabla \phi \quad (2)$$

$$\text{発散: ベクトル場とのスカラー積で、スカラー場を作る} \quad \nabla \cdot A \quad (3)$$

$$\text{回転: ベクトル場とのベクトル積で、ベクトル場を作る} \quad \nabla \times A \quad (4)$$

### 1.2 本日の授業内容

本日は、勾配・発散・回転の意味を説明し、その積分を考える。本日の授業の内容は、以下の通りである。

- スカラー場の勾配とその積分
- ベクトル場の発散とその積分
- ベクトル場の回転とその積分

ここでは、積分を考えるが、スカラー場やベクトル場のそのままの積分は興味が無い。それはそれで、地道に計算するしかなく、特別に説明することはない。微分したものを積分するとどうなるか考える。

---

\* 国立秋田工業高等専門学校 生産システム工学専攻

## 2 1変数関数の微分と積分

1変数関数の微分の積分は、次の通りである。

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a) \quad (5)$$

微分しものの積分は、両端の値で決まる。これから説明するスカラー場の勾配の積分もベクトル場の発散の積分もベクトル場の回転の積分も同じようになっている。このことに気がつけば、本日の積分の話はよく分かるだろう。

## 3 スカラー場の勾配と積分

### 3.1 勾配とは

3次元のスカラー場を図にすることは大変なので、最初は2次元スカラー場を用いて説明する。ただ、3次元でも全く同じことであることは頭の隅に入れておく必要がある。2次元のスカラー場として、山の高さ  $h$  を考える。これは、位置ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y)$  の関数で  $h(\mathbf{r})$  あるいは  $h(x, y)$  と書くことができる。

ここで、 $d\mathbf{r}$  だけ異なる位置の山の高さの差  $dh$  を考える。これは、

$$\begin{aligned} dh &= h(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - h(\mathbf{r}) \\ &= h(x + dx, y + dy) - h(x, y) \\ &\quad (x, y) \text{ の周りでテーラー展開して、1次の項のみをとると} \\ &= h + \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy - h(x, y) \\ &= \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (6)$$

となる。最後の式は全微分の式そのものなので、いきなりこれを書いても良い。ここでは、山の高さの差が分かりやすいように、テーラー展開を用いて示しただけである。ところでこの式は、

$$\begin{aligned} dh &= \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \\ &= \left( \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \cdot (dx, dy) \\ &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) h \right] \cdot (dx, dy) \\ &= [\nabla h] \cdot d\mathbf{r} \\ &\quad \text{括弧が無くても微分の順序は間違うことはないので} \\ &= \nabla h \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (7)$$

と書くことができるであろう。最後の式がベクトルで表した山の高さの差である。先週示したように、 $\nabla h$  は  $h$  の勾配と呼ばれるベクトル量である。むしろ  $\nabla$ 、変位  $d\mathbf{r}$  はベクトル量である。そしてこれらのベクトル

量のスカラー積は、2点間の山の高さの差  $dh$  を表し、それは明らかにスカラー量となる。山を歩いていて、 $dr$  移動すると、 $dh$  標高が変化するというを表している。ただし、式 (7) は、 $dr$  がゼロの極限のみで正しいことを忘れてはならない。

ここで勾配  $\nabla h$  の意味を考えなくてはならない。勾配  $\nabla h$  はベクトル量なので方向と大きさを持っているはずである。それを考えてみよう。そこで、式 (7) を

$$dh = |\nabla h| |dr| \cos \theta \quad (8)$$

と書き換えておこう。もちろん、 $\theta$  は2つのベクトルの間の角度である。勾配は場の量として決まっているが、変位  $dr$  は任意にとれる。地形は変えられないが、そこを歩く人間はどの方向にも向かうことができる。ぐるっと見渡して、もっとも高く上れる方を考える。式 (8) から同じだけ歩いてもっとも高く登れるのは、2つのベクトルが同じ方向を向いている場合である。このことから、勾配はスカラー場の値が大きくなる方向に向かっていることが分かる。スカラー場を等高線で表すと勾配はそれと直角方向にスカラー場の値が大きくなる方向に向かっている。勾配の大きさは、スカラー場の変化の割合を表しているの直ちに分かる。等高線の密度が詰まっているときに勾配は大きくなるのである。数学用語で勾配と言っているが、坂道を上るときの勾配と同じである。

ここでは2次元で話を進めたが、3次元スカラー場でも全く同じである。3次元の場合は、等高線ではなく等高面になる。この場合の勾配は、等高面に垂直で、スカラー場の値が大きくなる方向に向かっている。スカラー場の大きさは、等高面の間隔反比例しているのは2次元の場合と同じである。4次元の場合はどうか?。これは絵ではかけないので、式で考えるしかない。ただし、同じ形をしている。

### 3.2 勾配の積分

2つの場所  $r_1$  と  $r_2$  の標高差を考える。これは、勾配の積分として

$$h(r_2) - h(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \nabla h \cdot ds \quad (9)$$

のように表すことができる。 $r_1$  から  $r_2$  への経路に依存しない。標高差が勾配の積分で表せること、せきぶんの経路に依存しないことをしめす。そのため、ここでちょっとこの積分の意味を考えよう。積分の復習にもなるので丁度良い教材である。元々積分は、値とその微少量をかけて足しあわせる演算であった。次の式のようにである。

$$\int_{r_1}^{r_2} \nabla h \cdot ds = \sum_i \nabla h_i \cdot \Delta s_i \quad (10)$$

これは、ちょうど図1のように表せる。積分のパスを分割して、それぞれの場所での勾配と変位の内積を計算して足しあわせる。そして、変位を無限小にした場合の和が積分である。

次に、式 (12) の和を考える。微少量の内積を図2に示す。これは、式 (7) から、

$$\nabla h_i \cdot \Delta s_i = h_{i+1} - h_i \quad (11)$$

となる。積分路を  $N$  分割したとして、それを足しあわせると、

$$\sum_{i=1}^N \nabla h_i \cdot \Delta s_i = h_{N+1} - h_1 \quad (12)$$

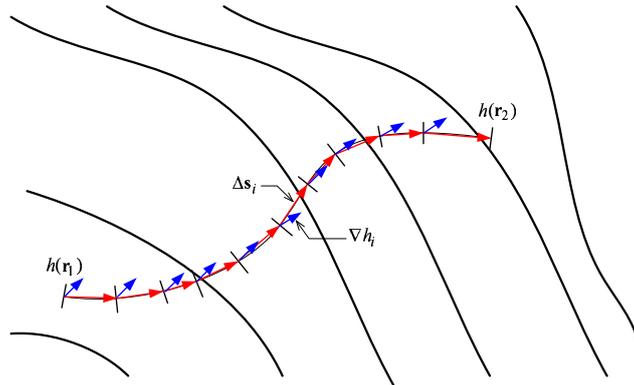


図 1: 積分を和として表す

となる。ここで、 $\Delta s_i$  をゼロに近づけた極限では、 $h_1$  は  $h(r_1)$  で、 $h_N$  は  $h(r_2)$  である。従って、式 (9) が証明できた。これまでの議論から、積分路に依存しないことも明らかであろう。

これも 2 次元で考えたが、3 次元に拡張しても一般的に成り立つ。 $\phi$  を 3 次元のスカラー場とすると、

$$\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla \phi \cdot d\mathbf{s} \quad (13)$$

である。スカラー場の差は、勾配を積分すれば得られるのである。

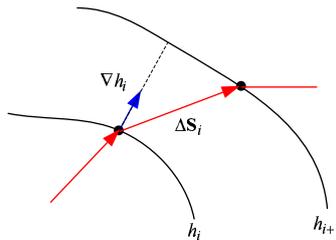


図 2: 微小領域の積分

## 4 ベクトル場の発散と積分

### 4.1 発散とは

この場合は、2 次元で考えるのはやっかいなので 3 次元で考えることにする。3 次元の閉じた空間内での熱の流れを考える。単位面積、単位時間あたりの熱の流れ [Jule/m<sup>2</sup>sec] はベクトル場である。これを  $A$  で表すことにする。ここでは、この空間から出入りする熱量の総和を考える。この閉じた空間の表面の微小面

積  $dS$  から出ていく熱量  $dQ$  は、

$$dQ = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (14)$$

である。ここで、 $\mathbf{n}$  は図 3 この微少面積の法線方向の単位ベクトルである。この熱の流れのベクトルと面積の内積を熱流束（一般にはフラックス）と言う。この式から、空間から出入りするトータルの熱量は、

$$Q = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (15)$$

となる。

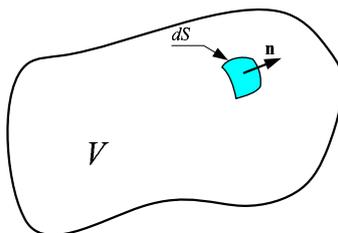


図 3: 熱の流出を考える空間とその表面

次に、先ほどの空間を図 4 のように  $V_1$  と  $V_2$  の 2 つの部分に分割した場合を考える。この場合、閉じた空間からの熱量の出入りの総和は、それぞれの部分の熱流速を足しあわせれば良い。すなわち

$$Q = \int_{V_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (16)$$

である。先ほどの式 (15) と同じになる理由は、以下のことから分かる。

- $V$  と、 $V_1$  あるいは  $V_2$  の共通の表面の部分は変わらない。
- $V$  と積分が異なるのは、図 4 の  $S'$  の部分である。この部分では、 $V_1$  と  $V_2$  での熱の流れのベクトルは同一である。しかし、積分をする場合の法線の方向が反対で、 $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$  の関係がある。すると、この部分での積分は、 $V_1$  と  $V_2$  を足しあわせるとキャンセルされる。

先ほどは 2 つに分割したが、この分割方法は任意で 2 つ以上に分割しても良いことは明らかである。図 5 のようにに  $N$  個に分割した場合は、

$$Q = \sum_i \int_{\Delta V_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (17)$$

である。これを非常に大きな数で分割して、 $V_i \rightarrow 0$  の極限を考える。すると、

$$\begin{aligned} Q &= \sum_i \int_{\Delta V_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \sum_i \left[ \frac{\int_{\Delta V_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V_i} \right] \Delta V_i \\ &= \int_V \left[ \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V} \right] dV \end{aligned} \quad (18)$$

である。ここで、

$$\nabla \cdot A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta V} A \cdot n dS}{\Delta V} \quad (19)$$

とする。これが発散と呼ばれる量で、ベクトル場の微分を表すスカラー量である。この発散を用いると、トータルの熱量は、

$$Q = \int_V \nabla \cdot A dV \quad (20)$$

となる。式 (15) と比べると、

$$\int_V A \cdot n dS = \int_V \nabla \cdot A dV \quad (21)$$

である。これをガウスの発散定理といい、熱にこだわらずどんなベクトル場についても成り立つ。この定理は、「微分の体積積分は表面での面積分に置き換えることができる」と言っている。

ここで考えた熱流速の場合、発散  $\nabla \cdot A$  は単位体積あたりの熱の出入りを表している。これは、その微小体積で熱が発生量を表している。そのため、発散とは言わずにこの微分を「湧き出し」と呼ぶ人もいる。

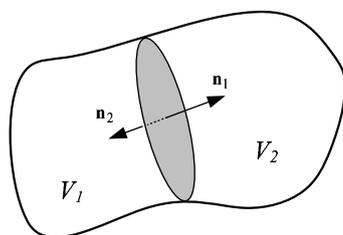


図 4: 2 分割

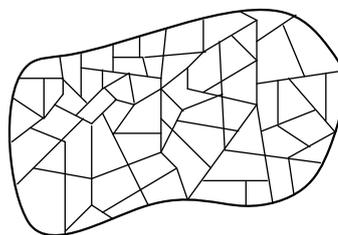


図 5: 微小な区間に分割

## 4.2 カートesian座標系での発散

発散は式 (19) で定義されるベクトル場の微分である。実際の微分について、カーテシアン座標系で考える。ベクトル場  $A$  があったとする。それは座標の関数で、 $A(x, y, z)$  と書けるであろう。図??に示したような微小な空間でのそのフラックス  $F$  を考える。まずは、 $xy$  平面である。これは、 $z$  と  $z + \Delta z$  の面のフ

ラックスを足しあわせれば良い。

$$\begin{aligned}
F_z &= F\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z\right) + \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \\
&= \mathbf{A}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z\right) \cdot \mathbf{n}_1 \Delta x \Delta y + \mathbf{A}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \cdot \mathbf{n}_0 \Delta x \Delta y \\
&\quad \mathbf{n}_1 = (0, 0, 1), \mathbf{n}_0 = (0, 0, -1) \text{ なので} \\
&= A_z\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z\right) \Delta x \Delta y - A_z\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \Delta x \Delta y \\
&= \left[ A_z\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z\right) - A_z\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \right] \Delta x \Delta y \\
&\quad (x, y, z) \text{ の周りで、テイラー展開すると} \\
&= \left[ \left( A_z + \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \right) - \left( A_z + \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \right] \Delta x \Delta y \\
&= \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z
\end{aligned} \tag{22}$$

yz, zx 平面も同様にして、

$$F_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad F_y = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \tag{23}$$

となる。

これから発散は、

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{V} \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F_x + F_y + F_z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{24}$$

となる。

これは、先週示した式と同じである。また、円柱座標系や極座標系については、私の web ページを見よ。

## 5 ベクトル場の回転と積分

### 5.1 回転とは

回転についても、発散と全く同じように議論を進める。回転のイメージを持つためには、流体を考えるのが良いであろう。非圧縮性流体の速度場を考える。速度なのでこれは、ベクトル場である。それが回転しているか否かを考えることにする。速度場のベクトルを  $\mathbf{A}$  で表し、回転  $\Omega$  を

$$\Omega = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{25}$$

と定義する。この積分は図??のように、ベクトル場を線積分する。この積分は、図??のように、2つに分割しても値は変わらない。

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\ell + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\ell \quad (26)$$

$C$ で積分するときの経路と  $C_1$ と  $C_2$ で積分するときの経路で異なるのは、分割線の部分である。ここでは、 $C_1$ と  $C_2$ のベクトル場は同じで、積分の方向が反対である。それ故、足しあわせるとキャンセルされる。図??分割をもっともっと多くしても、同じことが成り立つ。

$$\Omega = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\ell \quad (27)$$

発散の時と同様に、無限に多くの分割を行い、それぞれの積分経路の面積をゼロにした極限を考える。すると、

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\ell \\ &= \sum_i \left[ \frac{\oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\ell}{\Delta S_i} \right] \Delta S_i \\ &= \int_S \left[ \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\ell}{\Delta S} \right] dS \end{aligned} \quad (28)$$

となる。ここで、

$$\nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\ell}{\Delta S} \quad (29)$$

とする。ここで  $\mathbf{n}$ は、この積分を行う領域の面の法線方向の単位ベクトルで、積分領域の右ねじの向きとする。右辺はスカラー量なので、 $\nabla \times \mathbf{A}$ はベクトル量である。

この回転を用いると

$$\Omega = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (30)$$

となる。式 (25) と比べると、

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\ell = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (31)$$

である。これをストークスの定理という。これは、「回転と言われる微分の面積分は、その面の縁の線積分に等しい」と言っている。

先ほどの勾配でも線積分が現れた。この回転と勾配の関係を考えてみよう。

## 5.2 カーテシアン座標系での回転

回転は、式 (29) で定義されるベクトル場の微分である。これをカーテシアン座標系で考える。ここに、ベクトル場  $\mathbf{A}$ があったとし、それが  $(x, y, z)$  の関数であったとする。これを任意の  $xy$  平面で見ると、図??

のようになる。この面の微小領域の回転を考えよう。それは、

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= A_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta x + A_y \left( x + \Delta x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \Delta y \\
&\quad - A_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y, z \right) \Delta x - A_y \left( x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \Delta y \\
&= \left[ A_y \left( x + \Delta x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) - A_y \left( x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \right] \Delta y \\
&\quad - \left[ A_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y, z \right) - A_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \right] \Delta x \\
&\quad (x, y, z) \text{ の周りで、テイラー展開すると} \\
&= \left[ \left( A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) - \left( A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \right] \Delta y \\
&\quad - \left[ \left( A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y \right) - \left( A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta x \\
&= \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \tag{32}
\end{aligned}$$

となる。従って、 $z$  の回転は、式 (29) より、

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{A})_z &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\Delta S} \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y} \\
&= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{33}
\end{aligned}$$

同様に、 $x$  や  $y$  方向の回転を求めると、

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{34}$$

なる。

これは、先週示した式と同じである。また、円柱座標系や極座標系については、私の web ページを見よ。

## 参考文献