ベクトル解析3(スカラー場とベクトル場の微分)

山本昌志*

2005 年 5 月 13 日

1　本日の授業内容

先週は、ベクトルとは何か説明して、そのスカラー積 (内積) とベクトル積 (外積) について説明した。先週までで、ベクトルの和と積の演算の説明が完了した。本日は、微分の演算の説明を行う。本日の授業の内容は、以下の通りである。

- ベクトル場とスカラー場
- スカラー場の勾配
- ベクトル演算子 ∇
- ベクトル場の発散
- ベクトル場の回転
- スカラー場とベクトル場の 2 階微分
- ラプラス演算子

本日は、「ファインマン物理学 III 電磁気学　第 2 章」 [1] に沿って講義を行います。この辺の話は、ファインマンがかなり上手に説明をしており、分かり易い。講義がよく分からなければ、これをじっくりと読むと良い。

2　ベクトル場とスカラー場

場とは、空間の各点の量のことを言う。この量がスカラーのものをスカラー場、ベクトルのものをベクトル場と言う。空間の位置が決まればスカラーあるいはベクトルの値がきまると言うことで位置の関数であるが、時間の関数であっても良い。今のところ、時間の部分は気にしないで、位置との関係を見ていく。現実の世界では、次のような量である。

スカラー場 空間の温度分布、密度分布、

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

ベクトル場 流体の速度分布、電場、磁場

これらの量は、位置の関数で連続的に変化する。通常の物理の問題のように、不連続な変化は考えないことにする。連続的になめらかに変化するので、微分が決められる。本日は、このベクトル場とスカラー場の空間微分について、考える。

連続的になめらかに変化するスカラー場では、2 次元では等高線、3 次元では等高面を描くことができる。その等高線や等高面は次のような性質がある。

- 閉じているか、考えている空間でいっぱいに広がっているのどちらかである。
- 決して交わることは無い。

3 スカラー場の勾配 (grad)

3.1 勾配の定義

ここでは、スカラー場の微分を考える。温度を例にして考えることにするが、ここでの話はスカラー場一般について成り立つ。この温度は、位置の関数なので $T(x,\,y,\,z)$ と書くことができるであろう。いろいろな微分が考えることができる。たとえば、

$$\frac{\partial T}{\partial x} \tag{1}$$

である。これは、座標軸の取り方に依存してる。座標軸を変えれば、値が変わってしまうのは明らかである。従って、スカラー量はないし[1]、ベクトル量でない[2]のも明らかである。スカラー量でもベクトル量でも無いものは、座標軸を変えると式が変わってしまい、物理的な考察をするときには役に立たない。

まだ他に、スカラー場の微分はいろいろ考えられる。しかし、実際問題、スカラー場の微分で役に立つのは、勾配

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x},\,\frac{\partial T}{\partial y},\,\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2}$$

と呼ばれる量である。私は、これ以外の微分に出会ったことはない。スカラー場の微分で役に立つものはこれしか無いと考えよい。

この勾配には 3 つの成分があり、ベクトル場になっている。それぞれは、位置の関数であるので場の量であることは確かである。また、T はなめらかな関数なので、この 3 成分もなめらかに変化するのも確かである。後の問題は、この 3 成分がベクトル量であることを示せば良い。それを 2 つの方法で示す。

式 (2) がベクトルであることを示す。非常に近くの 2 点の温度を考える。それぞれを $T_1 = T(x,\,y,\,z)$ と

[1] スカラー量は座標軸を回転させても変化しない量である。
[2] 3 次元空間であれば少なくとも 3 つの量が必要である。

$T_2 = T(x+\Delta x,\, y+\Delta y,\, z+\Delta z)$ とする。温度差は、

$$\begin{aligned}
\Delta T &= T_2 - T_1 \\
&= T(x+\Delta x,\, y+\Delta y,\, z+\Delta z) - T(x,\, y,\, z) \\
&\simeq \left[T(x,\, y,\, z) + \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\Delta z \right] - T(x,\, y,\, z) \\
&\simeq \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\Delta z
\end{aligned} \tag{3}$$

となる。2 点の距離を 0 の極限まで近づけると、最後の式は等号で結ばれることになる。そして、変位ベクトル $\Delta \boldsymbol{R} = (\Delta x,\, \Delta y,\, \Delta z)$ と、記号 ∇T なるものを

$$\boldsymbol{\nabla} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x},\, \frac{\partial T}{\partial y},\, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \tag{4}$$

を導入すると

$$\begin{aligned}
\Delta T &= \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\Delta z \\
&= \left(\frac{\partial T}{\partial x},\, \frac{\partial T}{\partial y},\, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cdot (\Delta x,\, \Delta y,\, \Delta z) \\
&= \boldsymbol{\nabla} T \cdot \Delta \boldsymbol{R}
\end{aligned} \tag{5}$$

となる。左辺は温度差なので座標軸を回転させても値は変わらないから、スカラー量である。変位 $\Delta \boldsymbol{R}$ もベクトル量である。$\boldsymbol{\nabla} T$ は、ベクトル量 $\Delta \boldsymbol{R}$ との内積をとることによりスカラー量 ΔT になる。従って、$\boldsymbol{\nabla} T$ はベクトル量である。これをスカラー場 T の勾配と言い、$\mathrm{grad}\, T$ と書いたりもする。まとめると、

$$\boldsymbol{\nabla} T = \mathrm{grad}\, T = \left(\frac{\partial T}{\partial x},\, \frac{\partial T}{\partial y},\, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \tag{6}$$

である。

つぎに式 (6) がベクトル量になっていることを、座標軸の回転により証明しよう。3 次元は大変なので 2 次元の場合で説明するが、3 次元に拡張しても同じことが言える。元の座標を $(x,\, y,\, z)$、それを θ 回転させた座標を $(x',\, y',\, z')$ とした場合、それらには、

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{あるいは} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{7}$$

という関係がある。変位ベクトル $(\Delta x, \Delta y)$ も同じ変換なので、

$$\Delta x' = \Delta x \cos\theta + \Delta y \sin\theta \tag{8}$$

$$\Delta y' = -\Delta x \sin\theta + \Delta y \cos\theta \tag{9}$$

となる。先ほどと同じように距離を無限小にとった場合の温度差をプライムが付いた座標系で考える。温度

変化は、

$$\begin{aligned}\Delta T &= T(x' + \Delta x',\, y' + \Delta y') - T(x',\, y') \\ &= \frac{\partial T}{\partial x'}\Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'}\Delta y' \\ &= \frac{\partial T}{\partial x'}\left(\Delta x\cos\theta + \Delta y\sin\theta\right) + \frac{\partial T}{\partial y'}\left(-\Delta x\sin\theta + \Delta y\cos\theta\right) \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\sin\theta\right)\Delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial x'}\sin\theta + \frac{\partial T}{\partial y'}\cos\theta\right)\Delta y \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\sin\theta,\, \frac{\partial T}{\partial x'}\sin\theta + \frac{\partial T}{\partial y'}\cos\theta\right)\cdot(\Delta x,\, \Delta y) \end{aligned} \tag{10}$$

となる。この式の右辺の左側のベクトルと式 (5) の 2 次元の場合を比較すると、

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial T}{\partial x'} \\ \frac{\partial T}{\partial y'}\end{bmatrix} \tag{11}$$

となる。これを見て分かるように、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x},\, \frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{12}$$

はという量は、座標軸の回転に対して、座標が受けるのと同じ変換を受ける。従って、ベクトル量である。これと同じことが、3 次元の式 (6) についても成り立つのでベクトル量である。

4 ∇ 演算子

ここでは、∇ が演算子であり、ベクトルのような振る舞いを示すこと説明する。式 (11) から、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x},\, \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\sin\theta,\, \frac{\partial T}{\partial x'}\sin\theta + \frac{\partial T}{\partial y'}\cos\theta\right) \tag{13}$$

である。これを、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y}\right)T = \left(\frac{\partial}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial y'}\sin\theta,\, \frac{\partial}{\partial x'}\sin\theta + \frac{\partial}{\partial y'}\cos\theta\right)T \tag{14}$$

と書き改めても良いだろう。従って、$(\partial/\partial x,\, \partial/\partial y,\, \partial/\partial z)$ は演算子になっている。さらに、

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'}\end{bmatrix} \tag{15}$$

の関係より、ベクトルのように振る舞うことが分かるだろう。

∇ を独立したベクトル演算子と考えると都合がよい。どのように都合が良いかは後で述べる。勾配を表す式 (6) では ∇T で一つの記号であったが、今後はベクトル演算子 ∇ スカラー場 T との積と考える。すなわち、

$$\begin{aligned}\nabla T &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y},\, \frac{\partial}{\partial z}\right)T \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial x},\, \frac{\partial T}{\partial y},\, \frac{\partial T}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

である。ベクトル演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ は右側にある量に作用することを忘れてはならない。従って、積の交換法則は成り立たず、$\boldsymbol{\nabla}T \neq T\boldsymbol{\nabla}$ である。

また、これは微分を表すことも忘れてはならない。微分演算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ のようにである。このベクトル演算子はは当然スカラー場やベクトル量に作用する。

ベクトル演算子はベクトル量とスカラー積やベクトル積をとることができる。それについては、次節以降に述べる。

5　ベクトル場の発散

ベクトル演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ とのスカラー積を考えることができるだろう。これは、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{A}\\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{17}$$

となる。これは、発散と呼ばれるスカラー場である。ベクトル演算子とベクトル場のスカラー積なので、スカラー量になると覚える。実際に、スカラー量になることの証明は、諸君に任せる。

この量の物理的意味は、来週の積分の演算を通して示す。

6　ベクトル場の回転

次にベクトル演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ とのベクトル積を考える。これは、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\boldsymbol{A}\\ &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

となる。これは、回転と呼ばれるスカラー場である。ベクトル演算子とベクトル場のベクトル積なので、ベクトル量になると覚える。これが、実際にベクトル量になることの証明は、諸君に任せる。

この量の物理的意味は、来週の積分の演算を通して示す。

7　スカラー場とベクトル場の 2 階微分

ほとんどの物理法則は、1 階微分あるいは 2 階微分方程式で書かれる。3 階の微分方程式なんかお目にかかったことはないし、5 階や 23 階とかも無い。実に不思議なことである。ここでは、ベクトル演算子を使っ

たスカラー場とベクトル場の 2 階微分を考える。

7.1 ベクトル恒等式

ベクトル演算子を使った 1 階微分は先ほど示したとおりである。2 階微分もしばしば現れるので、それを示しておく。先程述べたようにベクトル演算子も、ベクトルと同じように振る舞う。そこで、ベクトルに関する式を先に示しておいた方が良いだろう。$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ をベクトルとして、重要なベクトル恒等式は、

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0 \tag{19}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0 \tag{20}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) \tag{21}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{22}$$

である。これらの証明は、各自ベクトル解析の教科書を見よ。

7.2 2 階微分

スカラー場を ϕ ベクトル場を $\boldsymbol{h}$ とした場合、ベクトル演算子を使った 2 階微分の可能な組み合わせは、次の通りである。

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi) \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi) \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h}) \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h}) \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h}) \tag{27}$$

これら、全ての組み合わせについて、どうなるか考えよう。

まずは、通常のベクトルの演算で 0 になるものを探し、その関係を利用して式 (23)〜(27) の演算で 0 になるものを類推する。以下のベクトルの演算が 0 になることは直ちに分かる。

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\phi)=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})\phi=0, \qquad \text{式 (19) より} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0, \qquad \text{式 (20) そのもの} \tag{29}$$

これらの関係から、$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{\nabla}$ 、$\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{h}$ とすると

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi)=0 \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h})=0 \tag{31}$$

と類推できる。類推ではあるが、これは正しい式である。学生諸君は、成分を計算してこれが成立することを確認すること。

次にベクトル公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{32}$$

を用いた場合を考える。A と B を $\boldsymbol{\nabla}$ で置き換え、$\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{h}$ とすると、

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h})-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}) \tag{33}$$

となる。右辺第 2 項の $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})$ が変である。この困難を避けるために、少し技巧的であるが、式 (32) を

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{34}$$

とすればよい。右辺第 2 項は、ベクトル $\boldsymbol{C}$ とスカラー $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ との積であるため、演算の順序を入れ替えても良い。こうすると、式 (33) は

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h})-(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{h}\quad=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h})-\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{h} \tag{35}$$

となり、正しそうである。事実、これは正しい式である。成分ごとに、きちんと微分を行えば分かる。

以上で、最初に示した 2 階の微分のうち、式 (24) と (26)、(27) の公式を導いた。残りは、特に興味のあるものは無い。そこで、以上の結果をまとめると

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi)=\nabla^2\phi=\text{スカラー場} \tag{36}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi)=0 \tag{37}$$
$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h})=\text{ベクトル場} \tag{38}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h})=0 \tag{39}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h})-\nabla^2\boldsymbol{h}=\text{ベクトル場} \tag{40}$$

となる。

ここで、∇^2 という演算子が現れている。これは、ラプラス演算子と言われるもので、いろいろな場面で活躍する。これについては、後でのべる。

これまでの話をまとめると、ベクトル演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ は通常のベクトルの演算規則が成り立ち、便利である。諸君は、これを上手に使えばよい。もし、その公式が気になるようであれば、成分に分けて、こつこつと微分をしてみれば良い。

7.3 注意点

先ほど、ベクトル演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ は通常のベクトル演算と同様に扱えると述べたが、注意が必要である。例えば、通常のベクトル公式

$$(\boldsymbol{A}\psi)\times(\boldsymbol{A}\phi)=0 \tag{41}$$

である。

- これがなぜ 0 になるか、図に示して説明せよ

もし、$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{\nabla}$ と置き換えると

$$(\boldsymbol{\nabla}\psi)\times(\boldsymbol{\nabla}\phi)=0?????? \tag{42}$$

となる。ベクトル $\boldsymbol{\nabla}\psi$ の方向は ψ に関係するし、$\boldsymbol{\nabla}\phi$ も同様である。したがって、0 になるのは特殊な場合である。

これは、次のように考える。最初の $\boldsymbol{\nabla}$ は ψ に作用し、つぎのものは ϕ に作用する。したがって、同じ $\boldsymbol{\nabla}$ でも異なるベクトルと考える。

だからと言って、$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi=0$ が成り立たないというわけではない。この場合、2 つの $\boldsymbol{\nabla}$ は同じ ϕ に作用する。

ベクトル演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ を $(\partial/\partial x,\,\partial/\partial y,\,\partial/\partial z)$ としてスカラー積やベクトル積を計算して、勾配や発散、回転を計算できるのは、カーテシアン座標系のみである。ほかの座標系になると、かなり複雑になる。詳細は、私の web ページに載せている。

http://www.akita-nct.jp/ yamamoto/study/electromagnetics/coodinate_transform/html/coodinate_trans.html

を参考にせよ。

8 ラプラス演算子

ベクトル演算子同士の内積をとった結果、

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\nabla&=\nabla^2\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\\&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{43}$$

の新しくできる演算子をラプラス演算子 (ラプラシアン) と言う。∇^2 の代わりに Δ と書くこともある。

これは、見て分かるようにスカラー演算子である。スカラー演算子であるため、スカラーやベクトルに作用することができる。スカラー場 ϕ に作用すると、次のようなスカラー場ができる。

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi&=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi\\&=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{44}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{h}$ に作用すると、次のようなベクトル場ができる。

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{h}&=\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\right)(h_x,\,h_y,\,h_z)\\&=\left(\frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2},\,\frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2},\,\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2}\right)\end{aligned} \tag{45}$$

先にも述べたように、このように単純に計算できるのはカーテシアン座標系の場合に限られる。ほかの曲線座標系のラプラス演算子は複雑である。円柱座標系と球座標系については、詳細は、私の web ページに載せている。

http://www.akita-nct.jp/ yamamoto/study/electromagnetics/laplacian/html/index.html

を参考にせよ。

参考文献

[1] Richard P. Feynman. 電磁気. ファインマン物理学 3. 岩波書店, 1983.