

ベクトル解析(その1)

山本昌志*

2005年4月22日

1 本日の授業内容

電磁気学そのものから離れて、これからしばらくベクトル解析の復習をする。電磁気学を簡潔に記述するためには、ベクトル解析が適している。そのため、それを復習して、後の学習をスムーズに進めたいという思いで、ベクトル解析で使われる演算について説明する。

本日は、以下の説明を行う。

- ベクトル基本
- ベクトルの表現方法
- ベクトルの定義

2 ベクトルの基本

2.1 ベクトルとは

長さや面積、あるいは質量、温度、時間、エネルギーなどは、大きさだけを持っている量である。これらの量は単位を決めれば、それらの何倍かという数値だけで完全に表現できる。これらの量をスカラー量と呼ぶ。

それに対して、変位や速度、加速度、力、運動量などは大きさだけでは表すことができない。大きさに加えて、その方向を示して、はじめて完全に表現できる。このように大きさと方向を持つ量をベクトル量という。位置ベクトルというものも、原点を決めてそこからの変位を表している。位置を表す量もベクトルである。

ベクトル量は便宜的に、一本の矢で表すことができる。矢の長さがその大きさを示し、先端の向きで方向を表す。例えば、図1のAのようにである。ベクトルの大きさは $|A|$ と表現して、図では矢の長さで示す。通常絶対値と言うものは、原点からの距離を示す(複素数の場合でも)ので、ここで同じ記号が用いられるのももっともである。当然、これはスカラー量である。ベクトルをその大きさを割った量は、ベクトル

*国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

で $A/|A|$ と表現され、これは大きさが 1 の単位ベクトルとなる。単位ベクトルの大きさが 1 になることは、各自確かめよ。また、大きさがゼロのベクトルも存在して、それはゼロベクトルと呼ばれ 0 と書かれる。

一般にベクトル量は A のようにボールド書体で、スカラー量は A のようにノーマル書体で書かれる。今後、この授業ではこのように表現してする。

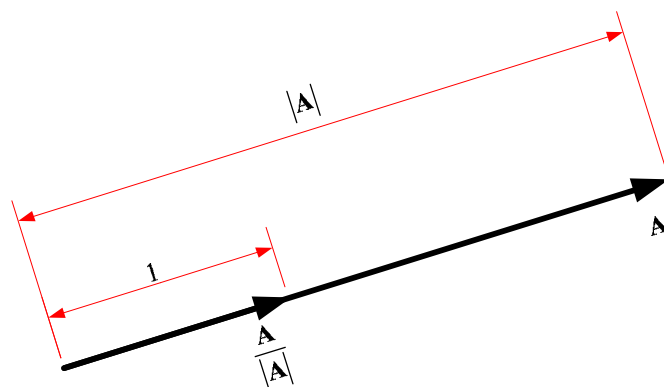


図 1: 矢で表現したベクトル

3 ベクトル同士の加算

ベクトルとスカラーの加算はできないし、全く意味がない。それは、速度と温度を加算しようとしているようなものである。スカラー量同士の加算は、今更言うまでもないであろう。

ベクトルの加算は単純で、2つの矢をつなぎ合わせれば良い。たとえば、

$$C = A + B \tag{1}$$

の場合、図 2 のようになる。同様にして、 $B + A$ も計算でき、図 3 に示すように $A + B$ と等しいことが分かる。

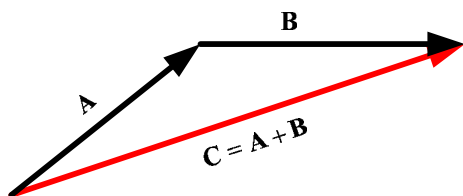


図 2: $C = A + B$

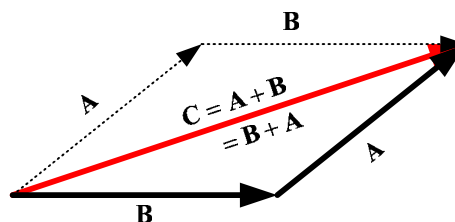


図 3: $C = B + A$

4 ベクトルとスカラーの乗算

ベクトルとスカラーの乗算も簡単である。スカラー量が正の場合は、方向を変えないでベクトルの大きさ(これはスカラー)をそのスカラー量倍すればよい(図4)。もし、かけるスカラー量が負の場合は、ベクトルの方向が逆になる。これは、ベクトルを-1倍すると、その方向が逆になることを示している(図5)。ちょうど普通の数(スカラー)を-1倍すると、原点を中心に数直線上で逆になるのと同じである。

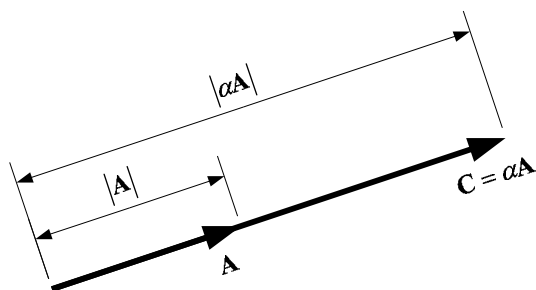


図 4: $C = \alpha A$

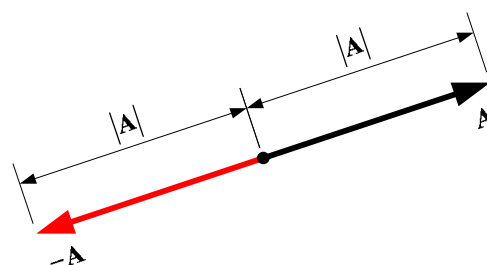


図 5: $C = -A$

ベクトルの-1倍が決められたので、ベクトルの引き算の演算も可能となる。たとえば、

$$C = A - B \quad (2)$$

は、ベクトル A とベクトル $-B$ の加算と考えるのである。これは、図2のようになる。

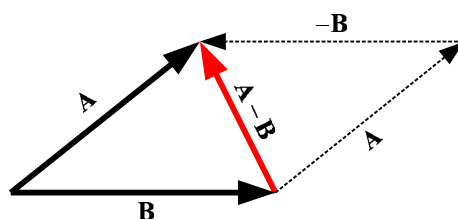


図 6: $C = A - B$

5 ベクトルの別の表現

5.1 成分を用いた表現

これまでの話で、ベクトルは矢で表されることが分かった。矢で表すと直感的に分かり易いが、計算には不向きである。そこで、別の表現を考えることにする。図7のようにその矢の始まりをカーテシアン¹座標系の原点において、先端の座標で表すことができる。そうすると、位置ベクトル r の場合、

$$r_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad (3)$$

¹Cartesian:デカルト (Descartes)(学説、説) の

のような表現が可能であろう。この、 x_1, y_1, z_1 をベクトル r の成分、あるいは射影と言う。我々は 3 次元 (相対論では 4 次元) の世界に住んでいるので、物理学で取り扱うベクトル量は 3 つの成分からなる。

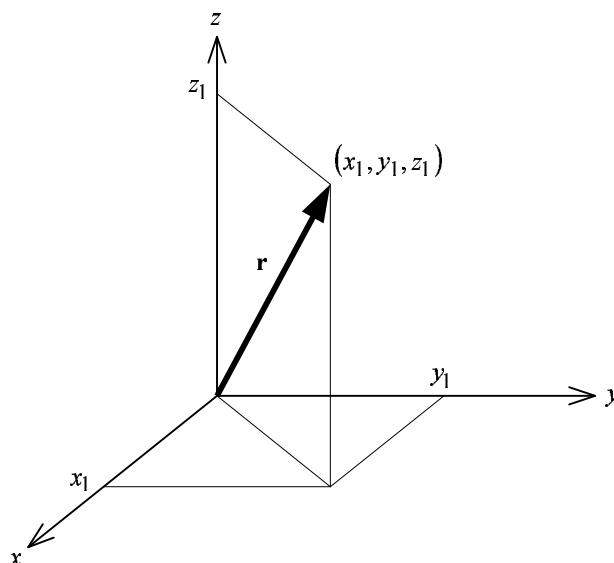


図 7: カートesian座標系をつかったベクトルの表現

このようにすると、ベクトルの表現は全く便利になる。今までの矢を用いた方法だと、ベクトル量の計算が大変やっかいである。計算するとなると数値で表すことになるが、長さや角度みたいな量で表すことになる。2 つのベクトル量をそれぞれ長さや角度の数値

$$\mathbf{A} = (r_A, \theta_A) \tag{4}$$

$$\mathbf{B} = (r_B, \theta_B) \tag{5}$$

で表現したとする²。これを加算することを考えると、かなり面倒である。

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} \\ &= (\text{長さの表現複雑}, \text{角度の表現複雑}) \end{aligned} \tag{6}$$

一方、座長を用いた表現だと

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} \\ &= (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) \end{aligned} \tag{7}$$

$$= (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \tag{8}$$

のように簡単に演算ができる。成分同士を加算すれば良いのである。これは、まったくもって便利である!!!!。

²3次元なので2つの角度が必要であるが、一つで代表させる。どうせ、計算しないのだから...

ここで、先ほどのカーテシアン座標の各軸に沿った単位ベクトルを導入すると、便利な場合がある。図 8 のようにすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (A_x, A_y, A_z) \\ &= A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (9)$$

のように表現できる。ここで、 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} が各軸に沿った単位ベクトルである。

成分を使った表現では、ベクトルの大きさも簡単に計算でき、ピタゴラスの定理より

$$|\mathbf{A}| = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (10)$$

となる。

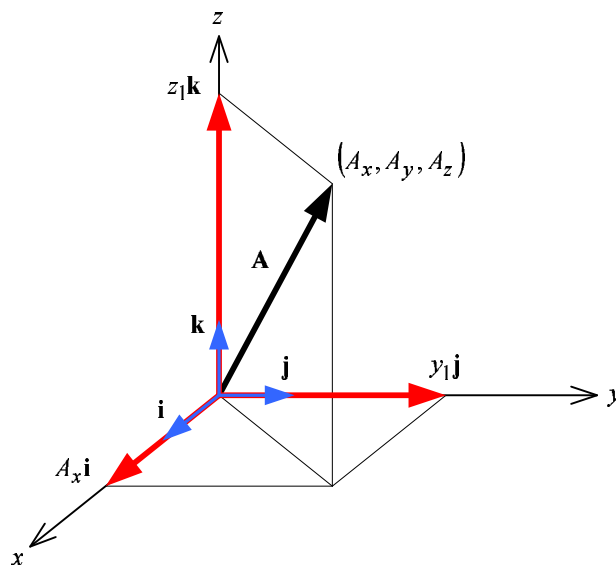


図 8: 単位ベクトル

[練習 1] 2 つのベクトル

$$\mathbf{A} = (1, 2, 3)$$

$$\mathbf{B} = (3, 2, 1)$$

の $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ と $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ を示せ。

[練習 2] [練習 1] のベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} の大きさを示せ。

5.2 方向余弦について

後に、方向余弦と言う話も出てくるので、少し説明をしておく。図7に示したように成分を使って、ベクトルは表現可能である。ベクトルの大きさを r とし、各軸との角度をそれぞれ図9のようにすると、

$$r_x = r \cos \alpha \qquad r_y = r \cos \beta \qquad r_z = r \cos \gamma \qquad (11)$$

の関係がある。ここで、 r はベクトル r の大きさを表す。これらの $r \cos \alpha$, $r \cos \beta$, $r \cos \gamma$ を方向余弦と言う。

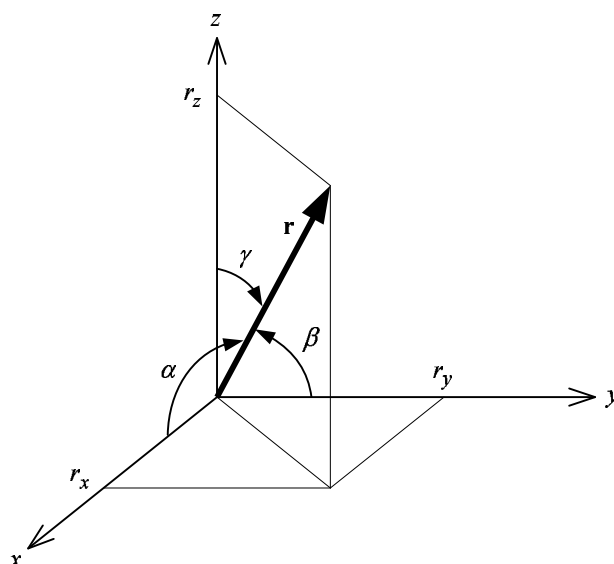


図9: 方向余弦

6 座標の回転とベクトル

物理の少し済んだ問題を考えるようになると、大きさと方向を持つ量をベクトルと定義できなくなる。例えば非当方的な物質に力を加えた場合の歪みを表す弾性定数などである。この辺の話は長くなるので行かないが、頭の中に入れておいて欲しい。

先に示したように、ベクトルは成分で表すことができる。3次元空間であれば、 y 方向と y 方向と z 方向の成分のようにである。しかし、よく考えてみると、空間には特別な軸というものはなく、等方的なはずである。従って、自然現象であるベクトルというものは軸の選び方によって、変化してはならないはずである。ベクトルの成分は軸の選び方によって変わってしまうが、ベクトルそのものは変わってはならない。そのためには、軸を変えた場合、それに応じてベクトルの成分が変わらなくてはならない。要するに、軸を変えても変化しない量がベクトルなのである。「方向と大きさを持つ量」よりも、「軸を変えても変化しない量」とする方がベクトルの定義としてふさわしい。それでは、軸を変えても変化しない量とはどのようにして分かるのだろうか?。これは、「軸を変えた場合、ベクトルの成分はどのように変化が必要がある」と言い換えることができる。

空間に浮かんでいる矢がベクトルと想像して欲しい。その矢の成分が軸を変えるとどうなるか考える。軸の変えると言うことは

- 軸の平行移動
- 軸の回転

に場合分けできる。軸の平行移動の場合、ベクトルの成分が変わらないのは明らかであろう。軸とベクトルとの角度は変化しないので、軸への射影である成分は変化しない。軸を平行移動させたら、位置ベクトルは変わるように思える。はじめに述べたように、位置ベクトルというものは、原点からの変位を表すもので、それを変えるため、成分の値が変わる。しかし、変位の原点を変えないで、座標軸を平行移動させた場合、その成分の値は変わらない。変位の原点と座標の原点を混同してはいけない。

一方、座標の回転に対してベクトルの成分の振る舞いは、座標変換を考えればよい。3次元の計算と図示は大変なので、2次元で考えることにする。例えば、図10のような変位ベクトルを考える。成分は、当然座標軸への射影であることを忘れてはならない。 $x-y$ 座標から $x'-y'$ 座標へ回転させる。座標軸を回転させても、ベクトルは変化しない。図の矢が変わっていないので、そうである。ただし、ベクトルの成分は変化する。この成分の変化は、

$$\begin{pmatrix} r'_x \\ r'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \quad (12)$$

と変換される。座標の回転に対して、ベクトルの成分はこの式と同じように変換されなくてはならない。ベクトルの成分は、座標系の回転ではその一つの点の座標と同じ変換となるのである。これを、新たなベクトルの定義して用いることにする。

これは、一つの物理的な法則がベクトルの方程式で表せたとすると、その式の関係は座標系を回転させても変わらないことを意味している。もっとはっきり言うならば、その法則は、座標系に依存していないと言えるのである。だからこそ、ベクトルを用いた表現は有用なのである。そう、物理におけるベクトル量は単なる幾何学の対象である。

ベクトルを矢で書くと、座標の変換によって、それが変わらないことは分かるが、計算は面倒である。一方、成分で表すと、計算は簡単であるが、座標変換による成分の変化をよく見ないといけない。ベクトルだと思っているものが、ベクトルでない場合があるのである。

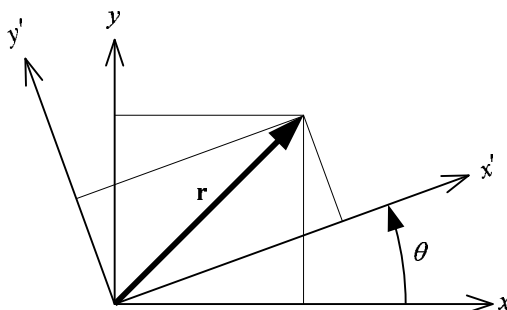


図 10: 座標の回転

[練習 1] 一組の量 $(-y, x)$ は 2次元ベクトルの成分であることを示せ。

[練習 2] 一組の量 $(x, -y)$ は 2 次元ベクトルの成分でないことを示せ。

7 課題

7.1 講義欠席者向け

- 全ての練習問題を解け。分からない場合は、私のところへ質問にくること。

7.2 課題 (全員)

[問 1] (1) 2 つの位置ベクトル $A = \overrightarrow{OA}$, $B = \overrightarrow{OB}$ の終点 A と B の間を $m : n$ の比に分ける点 P の位置ベクトルを $X = \overrightarrow{OP}$ とすれば、

$$X = \frac{nA + mB}{m + n}$$

であることを示せ。(2) 三角形 ABC の重心を G とし、点 A, B, C, G の位置ベクトルをそれぞれ、 $A = \overrightarrow{OA}$, $B = \overrightarrow{OB}$, $C = \overrightarrow{OC}$, $G = \overrightarrow{OG}$ とすれば、

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

であることを示せ。

[問 2] 3 つの互いに垂直な平面鏡からなる反射鏡がある。この反射鏡に入った光線 (3 つの反射鏡で反射される) は、入射方向と平行な方向にでていくことを示せ。(ヒント: 入射光線をベクトルの成分で表現する。そして、反射鏡はカーテシアン座標系の xy , yz , zx 平面にあるとする。)