

電磁気学の基本法則

山本昌志*

2005年9月2日

1 本日の授業内容

本日は、マクスウェルの方程式とエネルギー保存則について述べる。教科書には電磁ポテンシャルについても書かれているが、少しばかり難しいのでこれは省く。難しいがおもしろい内容なので興味がある者は、自習するのが良いであろう。

ここで学習するマクスウェルの方程式は電磁気学の全てが含まれている。通常、電磁気学を生業としている者はこの式から何でも導くことが出来る。要するにこれだけを憶えておけばよいのである。これには、今まで学習した全てが含まれているし、それ以上のもの(電磁波)があることが後の学習で分かる。

一方、エネルギー保存則は力学でおなじみのものである。電磁気学でもエネルギー保存則は成り立つ。力学や電磁気学のみならず、いままで発見されたいかなる現象でもエネルギー保存則は成り立っているのである。諸君がいろいろなことを考える場合、エネルギー保存則が成り立たないような現象や式が現れたら、何かが間違っていると確信しなくてはならない。それほど、エネルギー保存則は確固たる法則である。

2 マクスウェルの方程式

2.1 今まで学習してきたこと

これまで学習した電磁気学の方程式をまとめると、式(1)~(4)のようになる。これらの4組の方程式(左は積分形、右は微分形)をマクスウェルの方程式という。これは、電磁気学の全てが含まれており、ニュートン力学とともに古典物理学の2本の柱となっている。

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad (1)$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (4)$$

* 国立秋田工業高等専門学校 生産システム工学専攻

ただし、この方程式中の D は電束密度、 B は磁束密度、 E は電場の強さ、 H は磁場の強さを表す。また、 ρ は電荷密度、 j は電流密度を表す。

この方程式の電束密度と電場の強さ、磁束密度と磁場の強さには、

$$D = \epsilon E \quad (5)$$

$$B = \mu H \quad (6)$$

のような関係がある。この ϵ と μ は、物質の電磁気的な性質を表す量で、誘電率と透磁率と呼ばれている。一般に、真空中では ϵ_0 と μ_0 と書かれる。

さらに、実用上、有用な式としてオームの法則

$$j = \sigma E \quad (7)$$

がある。これは、以前示したように電磁気学的な力と統計の法則から導かれるので基本法則とは言えないが、実用上極めて便利な式である。

これまでここで示した式は、電磁気的なものばかりである。諸君は、電磁気学の現象が力学の現象と関わりを持つことを知っているだろう。モーターを見よ。これは磁場の作用が軸を回しているのである。このようなことから、電磁気学と力学をつなぐ基礎的な式があることが推測できる。実際、それはローレンツ力と言われるもので、

$$F = q(E + v \times B) \quad (8)$$

と書かれる。力が分かれば、後はニュートンの運動方程式¹

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (9)$$

を使えば、全てのことは分かる。ここで、 p は運動量である。後のことは力学で学習したとおりである。

2.2 古典物理学のすべて

「ファインマン物理学 III 電磁気学」には、1905 年まで知られている物理学の基本法則は、表 1 が全てであると書かれている²。

¹ $m \frac{d^2 r}{dt^2}$ を使わないで運動量を使ったのは、相対論を満足させるためである。

² ファインマンの教科書の表では電荷保存則が書かれているが、マクスウェルの方程式から導くことが出来るので、ここでは除いた。さらに、万有引力の法則も記述方法を変えた。

表 1: 古典物理

マクスウェルの方程式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && (\text{閉局面を通る電束}) = (\text{内部の電荷})/\epsilon \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (\text{ループをめぐり } E \text{ の線積分}) = -\frac{d}{dt}(\text{ループを通る } B \text{ の流速}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (\text{閉局面を通る } B \text{ 流速}) = 0 \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && c^2(\text{ループをめぐり } B \text{ の線積分}) = (\text{ループを通る電流})/\epsilon_0 \\ &&& + \frac{d}{dt}(\text{ループを通る電束}) \end{aligned}$$

力の法則

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

運動の法則

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{ただし、} \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (\text{アインシュタインの修正によるニュートンの法則})$$

万有引力

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

1905年というのはアインシュタインが特殊相対性理論を発表した年で、電磁気学と力学の矛盾を解決したのである。この特殊相対性理論ではマクスウェルの電磁気学はそのまま生き残り、ニュートンの力学が修正された。そして、ここで古典物理学は完成されたと言って良いだろう。

今年は、ちょうど100年目にあたり、諸君は区切りよい年に古典物理学の一方の柱を勉強しているのである。

3 エネルギー保存則

力学のエネルギー保存則はよく知られている。また、これまでの自然科学の学習の経験からエネルギー保存則はどのような場合でも成立することは分かっていると思う。ここでは、力学と電磁気学を含めた系でもそれが成立することを示す。

エネルギー保存則については、完全に教科書に沿って説明しよう。電磁場中での運動方程式も教科書に沿って

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{10}$$

とする。相対論的補正は加味されていないが、それを入れても同じ結果が得られるであろう。

電磁場中に2つの電荷があったとする。それぞれの電荷量を q_1 と q_2 、質量を m_1 と m_2 とする。それぞれの運動方程式は、

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = q_1 \mathbf{E} + q_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B} \quad (11)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = q_2 \mathbf{E} + q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B} \quad (12)$$

となる。このての方程式を積分するときは、両辺に \mathbf{v} の内積を乗じることが常套手段である。そうすると、

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] \quad (13)$$

となる。本当にそうなるかは、 $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ に注意して、右辺を微分してみれば分かる。したがって、先の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right] &= q_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{E} + q_1 \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}) \\ &= q_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right] &= q_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{E} + q_2 \mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}) \\ &= q_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここでは、 \mathbf{v} と $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は直交することを利用した。この式は、磁場 \mathbf{B} は電荷にエネルギーを与えることが出来ないと言っている。左辺の括弧内は運動エネルギー T を表している。両辺を積分すると、 $dT = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ となり、運動エネルギーの変化は電場と変位の内積となる。運動エネルギーに磁場は全く寄与しないのである。それならば、発電機はどうなっているのか? という疑問が湧くであろう。これについては、前回の授業で述べたはずである。ここでは、運動エネルギーについてのみ述べたが、ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）を含めても同じことが言える。

系全体の運動エネルギーの変化と電磁場の関係が見るために、先ほどの2つの運動方程式を足しあわせよう。この操作をするときに、荷電粒子は大きさを持つものとし、その電荷密度を ρ とする。したがって、電流密度は $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ となるので、これを考慮すると、

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right] = \int_V (\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2) \cdot \mathbf{E} dV \quad (16)$$

となる。当然、積分領域は考えている系全体である。

次に、マクスウェルの方程式の式4を使う。すると、

$$\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (17)$$

となる。教科書には、この式の右辺は2粒子の作る場と書いてあるが、それは場の一部にすぎない。この式は、右辺のように電磁場を微分するとそれは電流密度になると言っているだけである。その電磁場は当然、2粒子が作るものも含まれるが、ほかの理由により存在する電磁場も含む。この式を使うと、2粒子の運動エネルギーに関する式は

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right] = \int_V \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} dV \quad (18)$$

となる。この式の左辺は運動エネルギーに、いっぽう右辺は電磁場に関するものである。だんだんと、力学的なエネルギーと電磁場のエネルギーの関係に近づいたことが実感出来るであろう。

さて、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \quad (19)$$

のようなベクトル恒等式がある³。これを用いると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right] &= \int_V \left[\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV \\ &= \int_V \left[\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \\ &= \int_V \left[-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{nd}S \\ &= - \int_V \left[\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{nd}S \\ &= - \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) \right] dV - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{nd}S \\ &= - \frac{d}{dt} \int_V \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right] dV - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{nd}S \end{aligned} \quad (20)$$

となる。左辺は粒子の運動エネルギーの変化を表している。右辺第一項は電磁場のエネルギーの変化である。第二項は、エネルギーの流れを表している。この辺の事情については後で述べることにする。この式は、と書き改めることができる。

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) dV \right] + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{nd}S = 0 \quad (21)$$

この式のそれぞれの項は、

$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$	粒子の運動エネルギー [Jule]
$\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$	磁場のエネルギー密度 [Jule/m ³]
$\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$	電場のエネルギー密度 [Jule/m ³]
$\mathbf{E} \times \mathbf{H}$	単位面積あたりのエネルギーの流れ [Watt/m ²]

を意味している。運動エネルギーについては、力学で学習したとおりである。電磁場のエネルギーに関しては静電場での話と同じである。最後の項のみここで追加されたことになる。エネルギー保存則を満足させるためには、最後の項はエネルギーの流れ [Watt/m²] となる必要がある。本当にエネルギーの流れになっているかは、実験で確かめる必要がある。いろいろな実験の結果、この式がエネルギーの流れを表していることが確かめられているのである。このエネルギーの流れのベクトル

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (22)$$

は、発見者の名から、ポインティングベクトルと呼ばれている。

これらのエネルギーの関係は、図1のように表すことができる。

³成分に分けて計算すれば、証明は出来るであろう。教科書ではそうしている

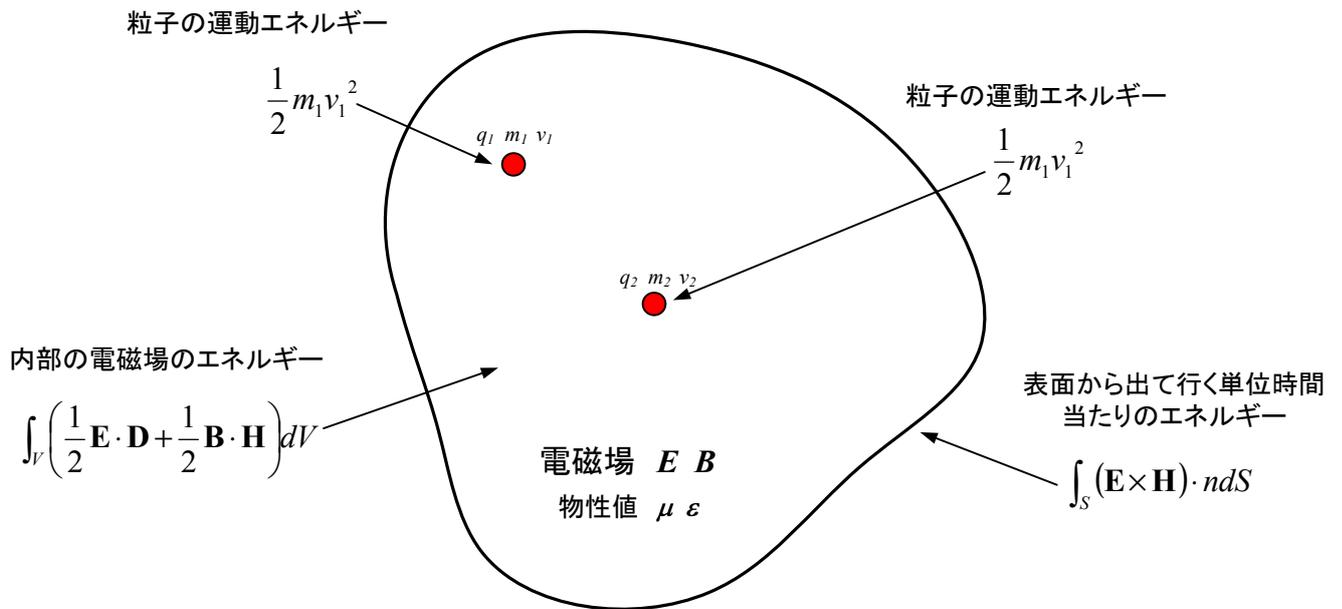


図 1: 電磁場と力学のエネルギーの関係

4 電磁ポテンシャル

実際にマクスウェルの方程式を解くとなるとかなりやっかいである。電場と磁場、そしてソース(源)としての電荷や電流が入り乱れている。そこで、電磁ポテンシャルというものが導入すれば、見通しの良い式に直すことができる。ただ、見通しの善し悪しは解くべき問題にかなり依存する。先の電場 E や磁場 B を用いた方がよい場合も、たくさんあることを忘れてはならない。ただ、電磁ポテンシャルを使うと式が美しいことは確かで、それはそれだけでもかなり意味があるだろう。

ところで、諸君に電磁ポテンシャルをきっちり説明する時間が無い。それでなくても、かなり駆け足で授業を進めているので、新たな概念(単なる式か)を導入するとさらに混乱するであろう。そこで、簡単に結果のみを示すことにする。

電磁場をベクトルポテンシャル A とスカラーポテンシャル ϕ を用いて

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (24)$$

と書き換える。すると、マクスウェルの方程式は

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (25)$$

$$\nabla^2 \phi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (26)$$

となる。2つとも波動方程式で、ベクトルポテンシャルの源は電流で、スカラーポテンシャルの源は電荷となっている。それにしても、対称性がよく美しい式である。