常微分方程式と連立方程式のまとめ (後期中間試験に向けて)

山本昌志*

2005 年 11 月 25 日

1　常微分方程式の数値計算法

数値計算により、近似解を求める微分方程式は、

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \text{初期条件}\quad y(a) = b \tag{1}$$

である。これは問題として与えられ、この式に従う x と y の関係を計算する。

1.1　4 次のルンゲ・クッタ法

前期末試験で出題したオイラー法や 2 次のルンゲ・クッタ法は，パラメーターを増やして誤差項の次数を上げていく方法である．この方法で最良と言われるのが 4 次のルンゲ・クッタ法である。パラメーターを増やして、5, 6, 7, $\cdots$ と誤差項を小さくすることは可能であるが、同じ計算量であれば 4 次のルンゲ・クッタの刻み幅を小さくするほうが精度が良いと言われている。

ということで、皆さんが常微分方程式を計算する必要が生じたときは、何はともあれ 4 次のルンゲ・クッタで計算すべきである。普通の科学に携わる人にとって、4 次のルンゲ・クッタは常微分方程式の最初で最後の解法である。

4 次のルンゲ・クッタの公式は、式 (2) に示す通りである。そして、これは図 1 のように表すことができる。

$$\left\{\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
x_{n+1} &= x_n + h \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

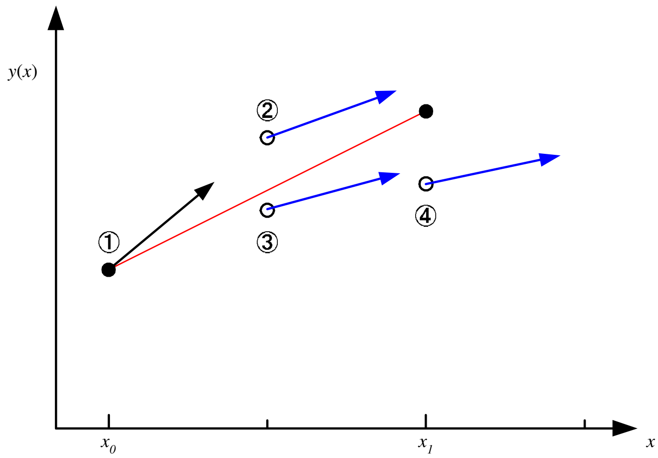

図 1: 4 次のルンゲ・クッタ法。ある区間での y の変化 Δy は、区間内の 4 点の傾きのある種の加重平均に幅 Δx を乗じて、求めている。

1.2 プログラム (4 次のルンゲ・クッタ法)

実際の微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sin x \cos x - y \cos x \\ y = 0 \quad (\text{初期条件 } x = 0 \text{ の時}) \end{cases} \tag{3}$$

を 4 次のルンゲ・クッタ法で計算するプログラムを示す。計算結果は、配列「x[]」と「y[]」に格納される。実際にプログラムでは、この結果を利用してグラフにしたりするのであるが、ここでは計算のみとする。

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define IMAX 100001
double func(double x, double y);

/*================================================================*/
/*       main function                                            */
/*================================================================*/
int main(void){
  double x[IMAX], y[IMAX];
  double final_x, h;
  double k1, k2, k3, k4;
  int ncal, i;


  /*--- set initial condition and cal range ---*/

  x[0]=0.0;
  y[0]=0.0;
```

```
  final_x=10.0;
  ncal=10000;

  /* --- size of calculation step --- */

  h=(final_x-x[0])/ncal;


  /* --- 4th Runge Kutta Calculation --- */

  for(i=0; i < ncal; i++){
    k1=h*func(x[i],y[i]);
    k2=h*func(x[i]+h/2.0, y[i]+k1/2.0);
    k3=h*func(x[i]+h/2.0, y[i]+k2/2.0);
    k4=h*func(x[i]+h, y[i]+k3);

    x[i+1]=x[i]+h;
    y[i+1]=y[i]+1.0/6.0*(k1+2.0*k2+2.0*k3+k4);
  }


  return 0;
}


/*================================================================*/
/*       define function                                          */
/*================================================================*/
double func(double x, double y){
  double dydx;

  dydx=sin(x)*cos(x)-y*cos(x);

  return(dydx);
}
```

1.3 高階の常微分方程式

1.3.1 1 階の連立微分方程式に変換

ここまで示した方法は、1 階の常微分方程式しか取り扱えないので不便である。そこで、高階の常微分方程式を 1 階の連立微分方程式に直す方法を示す。要するに、高階の常微分方程式を連立 1 階常微分方程式に直し、4 次のルンゲ・クッタ法を適用すれば良いのである。例えば、次のような 3 次の常微分方程式があっ

たする。

$$y'''(x) = f(x, y, y', y'') \tag{4}$$

この 3 階常微分方程式を次に示す式を用いて変換する。

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x) \\ y_1(x) = y'(x) \\ y_2(x) = y''(x) \end{cases} \tag{5}$$

この式を用いて、式 (4) を書き直すと

$$\begin{cases} y_0'(x) = y_1(x) \\ y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = f(x, y_0, y_1, y_2) \end{cases} \tag{6}$$

となる。これで、3 階の常微分方程式が 3 元の 1 階の連立常微分方程式に変換できた。2 階であろうが 4 階 $\cdots$ でも同じ方法で連立微分方程式に還元できる。

1.3.2 練習問題

以下の高次常微分方程式を連立 1 階微分方程式に書き換えなさい。

(1) $y'' + 3y' + 5y = 0$

(2) $y'' + 6y' + y = 0$

(3) $5y'' + 2xy' + 3y = 0$

(4) $y''' + y' + xy = 0$

(5) $5y'' + y' + y = \sin(\omega x)$

(6) $xy'' + y' + y = e^x$

(7) $5y''y' + y' + y = 0$

(8) $y''y' + x^2y'y + y = 0$

2 連立一次方程式

2.1 連立方程式の表現方法

連立 1 次方程式 (Linear Equations) は、次のような形をしている。

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3N}x_N &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + a_{M3}x_3 + \cdots + a_{MN}x_N &= b_M \end{aligned} \tag{7}$$

式 (7) は行列とベクトルで書くと、式がすっきりして考えやすくなる。書き直すと、

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{8}$$

である。それぞれの行列とベクトルは、

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} \quad = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \tag{9}$$

を表す。

通常、連立 1 次方程式 (7) は

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \tag{10}$$

と書き表せる。このようにすると、見通しがかなり良くなる。

2.2 ガウス・ジョルダン法の基本的な考え方

ガウス・ジョルダン (Gauss-Jordan) 法というのは、連立方程式 (10) を次にように変形させて、解く方法である。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_N \end{bmatrix} \tag{11}$$

この式から明らかに、求める解 $x_i = b'_i$ となる。これをどうやって求めるか?。コンピューターで実際に計算する前に、人力でガウス・ジョルダン法で計算してみる。例として、

$$\begin{cases} \;\; 1x + 2y + 3 = 2 \\ 2x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 2y + 1z = -1 \end{cases} \tag{12}$$

をガウス・ジョルダン法で解を求める。

解くべき、方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2 行 $-2\times$1 行

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3 行 $-2\times$1 行

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$-\frac{1}{2}\times$2 行

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ -5 \end{bmatrix}$$

1 行 $-2\times$2 行

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ -5 \end{bmatrix}$$

3 行 $+2\times$2 行

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

$-\frac{1}{2}\times$3 行

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

2 行 $-\ \frac{3}{2}\times$3 行

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これで、ガウス・ジョルダン法による対角化の作業は完了である。これから、$(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$ と分かる。

2.3 逆行列

ガウス・ジョルダンを使って，逆行列が求められる．以下のようにする．解くべき、方程式

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&3\\2&2&1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&y_{22}&y_{23}\\y_{31}&y_{32}&y_{33}\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

とする．

2 行 -2×1 行

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-3\\2&2&1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&y_{22}&y_{23}\\y_{31}&y_{32}&y_{33}\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

3 行 -2×1 行

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-3\\0&-2&-5\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&y_{22}&y_{23}\\y_{31}&y_{32}&y_{33}\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}2\\-3\\-5\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\right]$$

$-\frac{1}{2}\times2$ 行

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&\frac{3}{2}\\0&-2&-5\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&y_{22}&y_{23}\\y_{31}&y_{32}&y_{33}\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}2\\\frac{3}{2}\\-5\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\right]$$

1 行 -2×2 行

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{3}{2}\\0&-2&-5\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&y_{22}&y_{23}\\y_{31}&y_{32}&y_{33}\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\\-5\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\right]$$

3 行 $+2\times2$ 行

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{3}{2}\\0&0&-2\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&y_{22}&y_{23}\\y_{31}&y_{32}&y_{33}\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\\-2\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\right]$$

$-\frac{1}{2}\times3$ 行

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{3}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&y_{22}&y_{23}\\y_{31}&y_{32}&y_{33}\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right]$$

2 行 $-\frac{3}{2}\times$3 行

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&y_{22}&y_{23}\\y_{31}&y_{32}&y_{33}\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\sqcup\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-\frac{5}{4}&\frac{3}{4}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right]$$

これで、ガウス・ジョルダン法による対角化の作業は完了である。これから、$(x_1,x_2,x_3)=(-1,0,1)$ と分かる。さらに，逆行列が

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&3\\2&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-\frac{5}{4}&\frac{3}{4}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

と分かる.

2.4 ガウス・ジョルダン法の C 言語の関数

ピボット選択は行わないで、逆行列も求めないのガウス・ジョルダン法で連立方程式を計算するプログラムを示す。このプログラムの動作は、次の通りである。

- 仮引数「n」は、解くべき連立方程式の未知数の数である。
- 仮引数の配列「a」と「b」は、係数行列 $\boldsymbol{A}$ と非同次項 $\boldsymbol{b}$ である。値は、呼び出し元からにアドレス渡しで送られる。
  - 係数行列は、配列「a[1][1]」〜「a[n][n]」に格納されている。
  - 非同次項は、配列「b[1]」〜「b[n]」に格納されている。
- 連立方程式の解 $\boldsymbol{x}$ は、配列「b[1]」〜「b[n]」に格納される。
- このプログラムでの処理が終了すると、配列「a[1][1]」〜「a[n][n]」は単位行列になる。。

```
/* ========== ガウスジョルダン法の関数 =================*/
void gauss_jordan(int n, double a[][100], double b[]){

   int ipv, i, j;
   double inv_pivot, temp;

   for(ipv=1 ; ipv <= n ; ipv++){

      /* ---- 対角成分=1(ピボット行の処理) ---- */
      inv_pivot = 1.0/a[ipv][ipv];
      for(j=1 ; j <= n ; j++){
         a[ipv][j] *= inv_pivot;
      }
      b[ipv] *= inv_pivot;
```

```
        /* ---- ピボット列=0(ピボット行以外の処理) ---- */
        for(i=1 ; i<=n ; i++){
           if(i != ipv){
              temp = a[i][ipv];
              for(j=1 ; j<=n ; j++){
                 a[i][j] -= temp*a[ipv][j];
              }
              b[i] -= temp*b[ipv];
           }
        }

     }
  }
```

3 まとめ

この試験範囲で理解すべきことをまとめると、以下のようになる。

- 常微分方程式
  - 4 次のルンゲクッタ法の漸化式くらいは、暗記すること。イメージが湧けば、そんなに難しくはない。
  - 4 次のルンゲクッタ法のプログラムの内容が理解できること。
  - 高階の微分方程式が連立の 1 階の微分方程式に直せること。
- 連立 1 次方程式
  - ガウス・ジョルダン法で連立方程式が計算できること。
  - ガウス・ジョルダン法で逆行列が計算できること。
  - ガウス・ジョルダン法の C 言語の関数が理解できること。