前期末試験問題 (5E 計算機応用)

電気工学科　　学籍番号　　　　　氏名

1　ニュートン法 (Newton's Method)

[問 1] 20 点

ニュートン法は、方程式 $f(x)=0$ の近似解を求める方法の一つである。ある実数解を持つ関数 $f(x)$ をグラフにすると図のように書ける。この関数 $f(x)$ と x 軸の交点の x 座標がこの方程式の解となる。

ある近似解 x_n が求められたとすると、$(x_n, f(x_n))$ での接線が、x 軸と交わる点 x_{n+1} はさらに精度の良い近似解となる。そして、次の接線が x 軸と交わる点を次の近似解を x_{n+1} とする。図から分かるように、これを繰り返すと、非常に精度の良い近似解が得られる。

x_n と x_{n+1} の関係を示す漸化式は、接線の式

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

から求める。$y=0$ の時の x の値が x_{i+1} なので、x_{i+1} は、

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

となる。これをニュートン法の漸化式である。

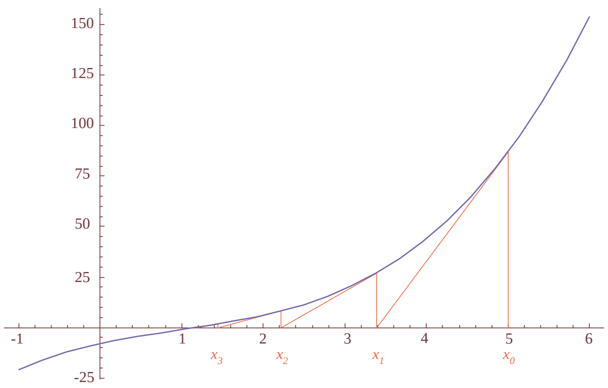

図 1: ニュートン法の収束

[問 2] 10 点

方程式 $f(x)=0$ の真の解を α とする。x_{i+1} と真値 α の差の絶対値、誤差を計算する。これは、

$$\begin{aligned}
|\alpha - x_{i+1}| &= \left|\alpha - x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right| \\
&= \left|\alpha - x_i + \frac{f(\alpha + (x_i - \alpha))}{f'(\alpha + (x_i - \alpha))}\right| \\
&\qquad \alpha \text{ の周りでテイラー展開する。} \\
&= \left|\alpha - x_i + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \left[1 - \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'^2(\alpha)}\right](x_i - \alpha) + O\left((\alpha - x_i)^2\right)\right| \\
&\qquad f(\alpha) = 0 \text{ なので} \\
&= \left|O\left((\alpha - x_i)^2\right)\right|
\end{aligned}$$

となる。これは、二次収束である。。

［**問 3**］ $\boxed{\textit{5 点}}$

二次収束なので、もう一度ニュートン法の漸化式を計算すると

$$\left(10^{-4}\right)^2 = 10^{-8}$$

の精度が得られる。

［**問 4**］ $\boxed{\textit{10 点}}$

ニュートン法

長所 初期値が適当ならば、解への収束が二分法に比べて非常に早い。二次収束である。

短所 二分法は必ず解へ収束するが、ニュートン法は初期値が悪いと収束しない場合がある。

二分法

長所 ニュートン法は初期値が悪いと収束しない場合があるが、二分法は必ず解へ収束する。

短所 ニュートン法に比べ、解への収束が遅い。一次収束である。

［**問 5**］ $\boxed{\textit{12 点}}$

［ア］ `x[i+1]=x[i]-func(x[i])/dfunc(x[i]);`

［イ］ `y`

［ウ］ `2.0*sin(x)*cos(x)+2.0*x`

［**問 6**］ $\boxed{\textit{10 点}}$

$$\sin^2 x + x^2 - 1 = 0$$

2 常微分方程式の数値計算法

［**問 1**］ $\boxed{\textit{10 点}}$

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)\Delta x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x_0)\Delta x^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\Delta x^n \end{aligned}$$

［**問 2**］ $\boxed{\textit{10 点}}$

先の問いのテイラー展開の 2 次以降を無視して、$f(x)$ を y_i、$f(x+\Delta x)$ を y_{i+1} とする。また、1 回微分の項は、元の問題の $f(x,y)$ である。さらに、Δx を h に書き直す。すると、

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

となる。これが、オイラー法の漸化式である。

［**問 3**］ $\boxed{\textit{10 点}}$

テイラー展開より

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + O(h^3) \tag{1}$$

が得られる。中点法は二次の精度があるので、その、計算アルゴリズムは、

$$\Delta y = y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + O(h^3) \tag{2}$$

となる必要がある。

中点法は出発点と中点で漸化式を作る。この 2 点を使って、増分 Δy を

$$\Delta y = h\{\alpha y'(x_0) + \beta y'(x_0 + \frac{h}{2})\} \tag{3}$$

のように求める。α と β は未知の定数である。これらの定数を求めるため、x_0 の回りでテイラー展開すると、

$$\Delta y = (\alpha + \beta)y'(x_0)h + \frac{\beta}{2}y''(x_0)h^2 + O(h^3) \tag{4}$$

が得られる。これを、式 (2) と比較すると、

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \tag{5}$$

となる必要がある。したがって、中点法の漸化式は、

$$\begin{cases} \quad k_1 = hf(x_n, y_n) \\ \quad k_2 = hf(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_1}{2}) \\ y_{n+1} = y_n + k_2 \end{cases} \tag{6}$$

となる。

3 おまけ

［**問 1**］ $\boxed{\textit{3 点}}$

$f(x) = 0$ の方程式の解を $x = \alpha$ とする。即ち、$f(\alpha) = 0$ である。そして、i 番目の近似解を x_i とする。ここから、Δx だけ移動したところの値は、

$$\begin{aligned} f(x_i + \Delta x) &= f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_i)\Delta x^2 + \cdots \\ &\text{ただし、}\Delta x\text{ が小さい場合} \\ &\simeq f(x_i) + f'(x_i)\Delta x \end{aligned}$$

となる。もし、$f(x_i + \Delta x) = 0$、即ち、$\alpha = x_i + \Delta x$ となるように、Δx を選ぶことができたら、解の計算は簡単である。この場合、先の式から

$$\Delta x \simeq -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{7}$$

となる。したがって、$\alpha = x_i + \Delta x$ から、次の近似解は

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{8}$$

となる。これが、ニュートン法の漸化式である。