

CR 発振回路

山本昌志*

2004 年 10 月 26 日

1 はじめに

前回の「LCR 直列回路」の問題が終わった者は、次の「CR 発振回路」の問題を解くこと。この回路は、3 年生の実験実習の「発振回路」で、実際に実験を行った回路である。ここでは、実験ではなく、計算機シミュレーションで発振する事を確かめる。

2 問題

2.1 CR 発振回路

3 年生の実験実習の「発振回路」では、図 1 の回路の実験を行った。ここでは、この回路が、本当に発振するか否か、シミュレーションする。

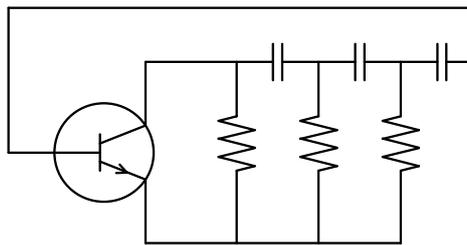


図 1: CR 発振回路。バイアスやトランジスタ駆動用の電源は省いている。

ただし、この回路のままだと、計算が大変なので、トランジスタを h パラメーターを用いて表現する。それは、図 2 のようになる。これを、1 周にわたって閉回路の電位差を足しあわせるとゼロになるというキルヒホッフの第 2 法則を表現しやすいように表したものが図 3 である。それぞれの図の回路は全く同じであることに注意せよ。

* 国立秋田工業高等専門学校 電気情報工学科

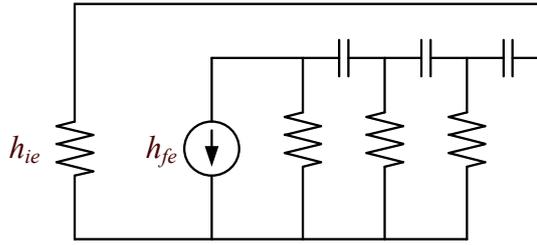


図 2: h パラメーターを用いた等価回路

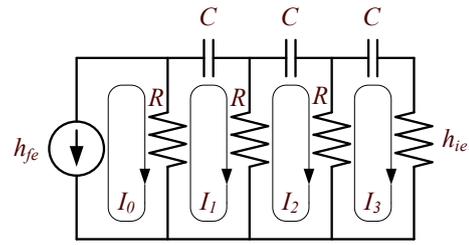


図 3: 書き直した等価回路

2.2 微分方程式

キルヒホッフの法則より、図 3 の回路では、

$$\begin{aligned}
 (I_0 - I_1)R - \frac{1}{C} \int_0^t I_1 dt + (I_2 - I_1)R &= 0 \\
 (I_1 - I_2)R - \frac{1}{C} \int_0^t I_2 dt + (I_3 - I_2)R &= 0 \\
 (I_2 - I_3)R - \frac{1}{C} \int_0^t I_3 dt - I_3 h_{ie} &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

が成り立つ。言うまでもないが、回路の電流 I_0, I_1, I_2, I_3 が時間の関数である。このままでは、ルンゲ・クッタ法で計算するのは困難なので、これらの式を時間で微分する。すると

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dI_0}{dt} - \frac{dI_1}{dt} \right) R - \frac{I_1}{C} + \left(\frac{dI_2}{dt} - \frac{dI_1}{dt} \right) R &= 0 \\
 \left(\frac{dI_1}{dt} - \frac{dI_2}{dt} \right) R - \frac{I_2}{C} + \left(\frac{dI_3}{dt} - \frac{dI_2}{dt} \right) R &= 0 \\
 \left(\frac{dI_2}{dt} - \frac{dI_3}{dt} \right) R - \frac{I_3}{C} - h_{ie} \frac{dI_3}{dt} &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

となる。このままだと、式が 3 個で未知数が 4 個なので、解くことができない。ここで、トランジスタの h パラメーターを導入する。トランジスタの特性より

$$I_0 = -h_{fe} I_3 \tag{3}$$

となる。すると、解くべき式は、

$$\begin{aligned}
 \left(-h_{fe} \frac{dI_3}{dt} - \frac{dI_1}{dt} \right) R - \frac{I_1}{C} + \left(\frac{dI_2}{dt} - \frac{dI_1}{dt} \right) R &= 0 \\
 \left(\frac{dI_1}{dt} - \frac{dI_2}{dt} \right) R - \frac{I_2}{C} + \left(\frac{dI_3}{dt} - \frac{dI_2}{dt} \right) R &= 0 \\
 \left(\frac{dI_2}{dt} - \frac{dI_3}{dt} \right) R - \frac{I_3}{C} - h_{ie} \frac{dI_3}{dt} &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

である。これが、回路の電流を表す微分方程式である。

これらの連立の微分方程式を4次のルンゲクッタ法で計算すれば良いのであるが、もう少し変形する必要がある。 $dI/dt = f(I, t)$ のような、形にする。これは、連立方程式なので、変形は面倒であるが可能である。計算し易いように変形¹すると

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= -\frac{(2h_{ie} + R)I_1 + (h_{ie} - h_{fe}R + R)I_2 + R(1 - 2h_{fe})I_3}{CR(3h_{ie} + R + h_{fe}R)} \\ \frac{dI_2}{dt} &= -\frac{(h_{ie} + R)I_1 + 2(h_{ie} + R)I_2 + R(2 - h_{fe})I_3}{CR(3h_{ie} + R + h_{fe}R)} \\ \frac{dI_3}{dt} &= -\frac{I_1 + 2I_2 + 3I_3}{C(3h_{ie} + R + h_{fe}R)}\end{aligned}\tag{5}$$

となる。

2.3 計算条件

常微分方程式を以下の条件で計算せよ。トランジスタの特性については、私は素人で全く知らないの
で、適当に仮定している。それでも、発振の基本的なメカニズムは分かるであろう。

- 計算を簡単にするために $C = 1$ 、 $R = 1$ とせよ。また、トランジスタの入力インピーダンスは小さいので、 $h_{ie} = 0$ とせよ。増幅率は、 $h_{fe} = 20, 28, 29, 30, 40$ のおのおので計算し、 I_3 の電流をグラフにせよ。なにが起きているか?。周波数は、付録の理論計算と合っているか?。
- 先の計算が終われば、増幅率が電流 I_3 の関数である場合について、考察する。一般に、トランジスタは電流が増加すると増幅率は下がる。このことにより、発振の成長が止まり、振幅が一定になる。増幅率が

$$h_{fe} = 40 - I_3\tag{6}$$

とした場合 (図 4) について計算せよ。この場合は、うまく発振しない。なぜか?

- 次に、増幅率が

$$h_{fe} = 40 \times \exp\left(-\frac{I_3^2}{2}\right)\tag{7}$$

の場合 (図 5) について、計算してみよう。この場合は、安定に発振する。なぜか?。安定状態の波形は正弦波になっているだろうか?。なぜ、そのような波形になるか、考えてみよう。

これを計算する場合のヒントを与えておく。発振の成長は、種信号の増幅の繰り返しである。実際の発振器の種信号は、熱雑音であったり、スイッチの ON/OFF のノイズであったりする。計算機でシミュレーションする場合、それは、 $I_1(0)$ または $I_2(0)$ 、 $I_3(0)$ のいずれかの一つに非常に小さい値を与えれば良い。そして、残りの2つは、ゼロとしておく。

¹Mathematica の助けを借りて変形した

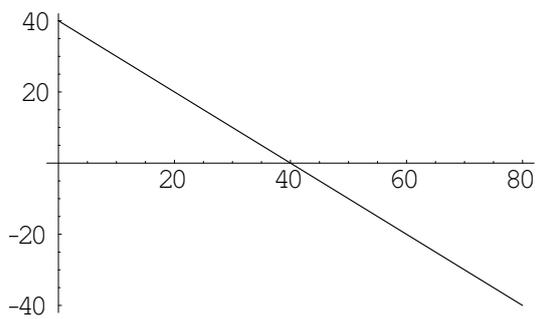


図 4: 1 次関数で増幅率が変化

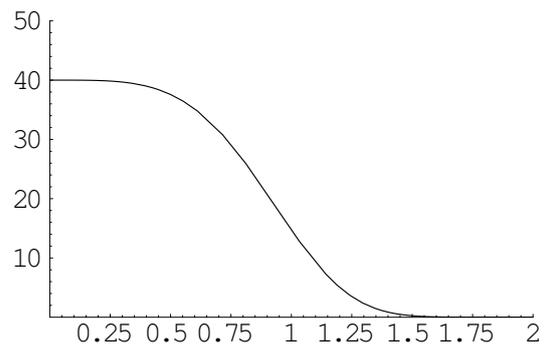


図 5: ガウス分布で増幅率が変化

3 付録

CR 発振回路の詳細については、私のホームページの講義ノート (2003 年度の実験) を見よ。CR 発振回路の発振周波数は

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{6}CR} \quad (8)$$

である。また、発振条件は、トランジスタの入力インピーダンスを $h_{ie} = 0$ とした場合、

$$h_{fe} > 29 \quad (9)$$

である。