静電容量の計算

山本昌志[*]

2005 年 12 月 9 日

1 はじめに

反復法を用いて，連立方程式の解を数値計算する練習問題である．半日，考えたが，感動が味わえるようなおもしろい問題を思いつかなかった．そこで，非常にオーソドックスなコンデンサーのキャパシタンスを計算することにする．諸君は電気工学科の学生なので，ちょうど良い練習問題のようにも思える．

後の授業では，差分法を学習し，そこでも連立方程式が重要な役割を果たす．そこでは，もう少しおもしろい応用を教える．楽しみにしてください．

2 方程式

2.1 コンデンサーの性質

コンデンサーを規定する重要な性質にキャパシタンス (静電容量) があるのは，十分承知していると思う．これを計算する方法は，いろいろある．その中で，私が好んで使う方法は，エネルギーから計算する方法である．これは，電場の状態がキャパシタンスを決めるという意味で非常に物理的意味が分かりやすい．空間に電場 $\boldsymbol{E}$ が分布している場合，そのエネルギー $\boldsymbol{U}$ は

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{1}{2}\int \varepsilon \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}dV \\ &= \frac{1}{2}\int \varepsilon \boldsymbol{E}^2 dV \end{aligned} \tag{1}$$

となる．$\frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}^2$ が静電場のエネルギー密度になっている．信じられない，それならば次元解析をしてみよ．

また，よく知られているように，コンデンサーの電圧 V とキャパシタンス C，そして，そこにたまっているエネルギーの関係は，

$$U_c = \frac{1}{2}CV^2 \tag{2}$$

である．コンデンサー内部では，それらは図 1 のような関係になっている．これからも分かるように，コンデンサーの内部には式 (1) が示す静電場のエネルギーが蓄えられている．一方，電気的には，式 2 が示す

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

エネルギーが蓄えられている．これらのエネルギーは，当然等しいので，

$$\frac{1}{2}\int \varepsilon \boldsymbol{E}^2 dV = \frac{1}{2}CV^2 \tag{3}$$

という関係がある．この式の左辺の電場はいろいろな方法で計算でき，静電場のエネルギーを求めることができる．一方，電圧 V は予め与えられているので，このエネルギーをつかって，静電容量が計算できる．要するに，静電場 E を求めることができれば，静電容量 C が計算できるのである．

いままで，よく分からなかった静電容量というものは，コンデンサーに蓄えられるエネルギーを示す指数と考えて良い．私は，この考え方が好きである．なにしろ，分かりやすい．

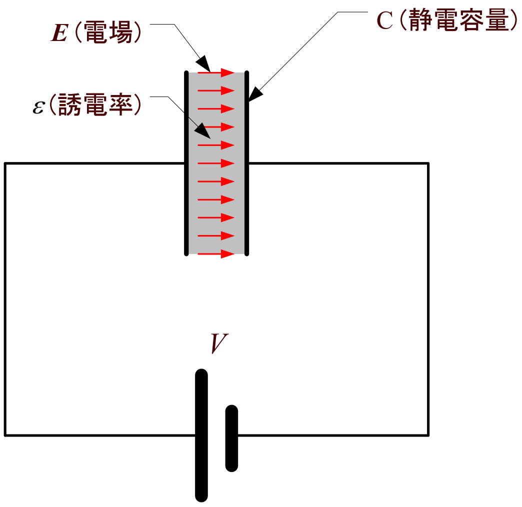

図 1: コンデンサーの様子

2.2 コンデンサー内部の電場

先に示したとおり，コンデンサー内部の電場が分かれば，そのキャパシタンスを求めることができる．それは簡単ではないか，電圧 V を電極間距離 L で割れば，$E = V/L$ と求められると言う人がいる．これは，コンデンサー内部で誘電率が一様な場合は正しい．そんな単純な問題は，いままでさんざん学習してきたし，つまらない．ここでは，もう少し難しい問題を解くことにする．

誘電率が，3 次元 (x, y, z の関数) で変化すると計算が大変なので，1 次元問題に限ることにする．2 次元や 3 次元も考え方は同じであるが，計算は大変である．ここで，計算するコンデンサー内部は，図 2 のとおりとする．誘電率は，座標 x の関数で，変化するものとする．

このような場合の電場はどうなるのであろうか?．一つの方法は，ポアッソン方程式[1]

$$\nabla^2(\varepsilon\phi) = 0 \tag{4}$$

[1] $\nabla \cdot \varepsilon \boldsymbol{E} = 0$ と $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ から求められる．

を解くことである．ここで，ϕ はポテンシャルで，電圧のことである．少し気取って書いているのである．この微分方程式を $\phi(0)=V_0,\phi(L)=V_1$ の境界条件で解けば良い．そうすると必要なものが全て計算できるので，静電容量を計算できる．しかし，今回は，この方法で計算しないことにする．

ポアッソン方程式の代わりに，コンデンサー内部の電場は，そのエネルギーが最小になるように分布すると言う原理を使う．当然，このばあいでも，境界条件 $\phi(0)=V_0,\phi(L)=V_1$ は課せられている．コンデンサーの内部のエネルギーは，1 次元なので，

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{1}{2}\int \varepsilon {\boldsymbol{E_x}}^2 dV \\ &= \frac{S}{2}\int_0^L \varepsilon {\boldsymbol{E_x}}^2 dx \end{aligned} \tag{5}$$

と書ける．

このポテンシャル分布をコンピューターに計算させるために，コンデンサーの内部を細かく N 等分に区切る．この様子を図 3 に示す．すると，エネルギーは

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{S}{2}\int_0^L \varepsilon {\boldsymbol{E_x}}^2 dx \\ &= \frac{S}{2}\int_0^L \varepsilon \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx \\ &= \frac{S}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_i+\varepsilon_{i-1}}{2}\left(\frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{h}\right)^2 h \\ &= \frac{Sh}{2}\left[\cdots+\frac{\varepsilon_i+\varepsilon_{i-1}}{2}\left(\frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{h}\right)^2+\frac{\varepsilon_{i+1}+\varepsilon_i}{2}\left(\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{h}\right)^2+\cdots\right] \end{aligned} \tag{6}$$

となる．

静電場のエネルギーが最小になるためには，微分がゼロになる必要がある．このエネルギーをポテンシャル ϕ_i で微分すると

$$\frac{\partial U_s}{\partial \phi_i} = Sh\left[\frac{\varepsilon_i+\varepsilon_{i-1}}{2}\left(\frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{h}\right)-\frac{\varepsilon_{i+1}+\varepsilon_i}{2}\left(\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{h}\right)\right] \qquad (i=1,2,3,\cdots,N-1) \tag{7}$$

となる．U_s が最小値になるためには，$\frac{\partial U_s}{\partial \phi_i}=0$ となる必要がある．また，コンデンサーの両端の電圧は固定されているので，$\phi_0=V_0$ で $\phi_N=V_1$ である．従って，これらをまとめると

$$\begin{cases} \phi_0 = V_0 \\ -\left(\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_i\right)\phi_{i-1}+\left(\varepsilon_{i-1}+2\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}\right)\phi_i-\left(\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}\right)\phi_{i+1}=0 \\ \phi_N = V_1 \end{cases} \tag{8}$$

となる．要するに，この連立 1 次方程式を計算すれば，任意の誘電率の場合のコンデンサー内部のポテンシャル (電圧) が得られる．ポテンシャルが分かれば，電場が分かり，そうすると内部のエネルギーが計算できる．従って，静電容量が求められるわけである．

じつは，ここで示した計算方法は有限要素法と呼ばれている．

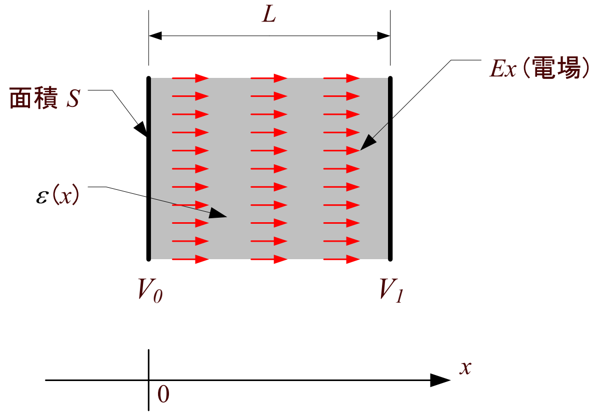

図 2: コンデンサー内部

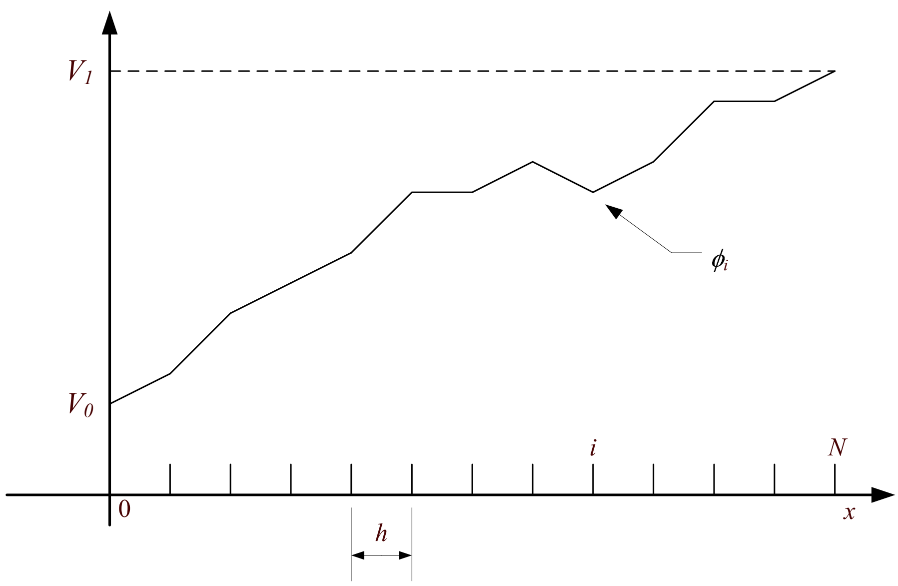

図 3: 分割の様子

3　問題

簡単のため，

$$V_0 = 0 \tag{9}$$

$$V_1 = 1 \tag{10}$$

$$S = 1 \tag{11}$$

$$L = 1 \tag{12}$$

とせよ．そして，以下の場合の静電容量を求めよ．

- $\varepsilon = 1$ とした場合の静電容量を求めよ．手順は以下の通り．
  - 式 (8) を SOR 法あるはガウス・ザイデル法により計算して，ポテンシャル ϕ_i を求める．
  - ポテンシャル ϕ_i を用いて，式 (6) を計算し，静電場のエネルギーを計算する．
  - 静電場のエネルギーより，式 (3) を計算して，静電容量を計算する．
- $0 < x < 0.5$ では $\varepsilon = 1$，$0.5 < x < 1.0$ では $\varepsilon = 2$ の場合の静電容量を計算せよ．また，手計算の理論式と比較せよ．
- $0 < x < 1$ では $\varepsilon = 1 + x$ の場合の静電容量を計算せよ．少し難しいが，理論計算と比較せよ．