

平成17年度 (3年生前期)

実験実習

Experiments in Electrical Engineering

— 電子系の実験指導書 —

秋田工業高等専門学校 電気工学科

作成日 2005年4月11日
作成者 山本昌志

目次

第 1 章	共振回路の特性測定	3
1.1	目的	3
1.2	原理	3
1.2.1	共振回路	3
1.2.2	Q 値の測定方法	4
1.3	実験方法	5
1.3.1	手順	5
1.3.2	注意事項	6
1.4	結果	6
1.5	考察課題	7
第 2 章	LCR 回路の過渡応答	8
2.1	目的	8
2.2	原理	8
2.2.1	CR 回路	8
2.2.2	LR 回路	9
2.2.3	LCR 回路	10
2.3	実験方法	13
2.3.1	測定器	13
2.3.2	CR 回路の過渡応答	13
2.3.3	LR 回路の過渡応答	15
2.3.4	LCR 回路の過渡応答	16
2.4	結果	18
2.5	考察課題	19
第 3 章	CR 回路の周波数応答	20
3.1	目的	20
3.2	原理	20
3.3	実験方法	21
3.3.1	周波数応答	21
3.3.2	時間応答	23
3.4	結果	24
3.4.1	周波数応答	24
3.4.2	時間応答	25
3.5	考察課題	25
第 4 章	トランジスタの静特性の測定	26
4.1	目的	26
4.2	原理	26
4.2.1	真性半導体	26
4.2.2	不純物半導体	27
4.3	実験方法	31
4.3.1	測定回路および注意事項	31
4.3.2	V_C - I_C 特性および V_C - V_B 特性測定	32

4.3.3	I_B - V_B 特性および I_B - I_C 特性測定	33
4.4	結果	33
4.5	考察課題	34
第 5 章	基本論理回路	35
5.1	目的	35
5.2	原理	35
5.2.1	ブール代数の公理	35
5.2.2	ブール代数の諸定理	36
5.2.3	真理値表と MIL 記号	36
5.3	実験方法	38
5.3.1	基本動作実験	38
5.3.2	論理式実験	45
5.3.3	応用実験	45
5.4	考察課題	45
付 録 A	微分方程式	46
A.1	一階線型常微分方程式	46
A.2	二階線型常微分方程式	47

諸注意

以下、注意事項を箇条書きするので、厳守すること。

1. 実験時の服装など

- 実験室で定められた服装を着用すること。
- 履物は、内履き用ズック靴とする。

2. 実験ノート

- A4の実験ノートを用意すること。ルーズリーフは不可である。
- 実験ノートへの記述は、ボールペンあるいは万年筆とする。鉛筆は不可である。

3. レポートの提出

- 次回の実験日の AM8:55 までとする。それ以降に提出したものは、減点の対象とする。
- 前期あるいは後期の最後の実験の場合は、その1週間後とする。
- 提出期限に遅れたものは、減点とする。
- 未提出のレポートがある場合は、単位を与えることができないので注意すること。
- たとえ実験を休んでいても、同じ班のメンバーにデータをもらい、レポートとして提出すること。
- 提出先は、担当教官のレポート入れとする。

4. レポートの再提出

- 内容に不足があるものはレポートの再提出を課す。この場合、提出遅延の減点は課さない。したがって、完成していなくても期限内に提出することは重要である。
- 再提出の期限は、再提出を言い渡された1週間以内とする。

5. レポートの書き方

- 手書き、パソコンのプリントアウト(ワープロ)、どちらで書いてもOKとする。
- ただし、手書きの場合はボールペンもしくは万年筆で書くこと。
- 自宅にワープロが無い場合は、情報教育ルームのパソコンを使うのが良いであろう。
- 実験プリントに記述されている以下の内容をレポートにまとめること。

- － 目的
- － 原理
- － 実験方法
- － 結果

* 実験結果は、図やグラフあるいは表を用いて、具体的に文章で説明すること。図やグラフを説明なしで載せただけでは、科学的な報告書とは言えない。

- － 考察
 - * 実験結果から考えられること、理論と実験結果の比較を書く。あるいは、実験目的に対しての考察を記述するのもよいであろう。
- － 考察課題
 - * 課題は結論に至るまでの過程を文章で記述すること。図や表を用いて分かりやすく書くことに努めよ。
- － 感想
- － 参考文献
- レポートの表紙は電気工学科標準のものとする。ただし、同一のものをワープロで作成しても良い。

6. その他

- 実験に関する資料は、web(www.ipc.akita-nct.ac.jp/yamamoto/) に載せてある。必要に応じて参考にするのがよいであろう。

第1章 共振回路の特性測定

1.1 目的

LCR 直列共振回路の共振現象を理解するとともに、抵抗分 R の増加が回路の Q 値に与える影響について調べる。

1.2 原理

1.2.1 共振回路

図 1.1 のような LCR 直列共振回路に交流電圧 E を加えたとき、回路に流れる電流 I は

$$\begin{aligned} I &= \frac{E}{Z} \\ &= \frac{E}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

となり、その大きさは

$$|I| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (1.2)$$

とである。

いま、電流が最大に流れるように、交流電源の角振動数 ω を調整して、 $\omega_0 L - 1/(\omega_0 C) = 0$ とする。すなわち、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.3)$$

とする。 $\omega = 2\pi f$ なので、周波数に直すと、 $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ である。このようにすると、回路に流れる電流は、

$$I_0 = \frac{E}{R} \quad (1.4)$$

となる。最大の電流が流れるこの状態を共振と言う。丁度、電源の周波数と回路の固有振動数が一致している状態となっている。図 1.1 のような回路を直列では直列共振という。そして、電源の電圧を一定にしてその周波数を変化させると、図 1.2 のように回路に流れる電流が変わる。このような図を共振曲線という。

図から明らかなように、 R の小さい回路では共振時の電流 I_0 は非常に大きくなるが、共振周波数からずれると、それは急激に減少する。この共振曲線の形状の鋭さを測る物差しとして Q を定義し、これを共振の鋭さ (sharpness of resonance) と言う。

$|I|$ が I_0 の $1/\sqrt{2}$ になる周波数を $f_1 = \omega_1/2\pi$ 、 $f_2 = \omega_2/2\pi$ として、

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad (\omega_1 \leq \omega_0 \leq \omega_2) \quad (1.5)$$

と定義する。

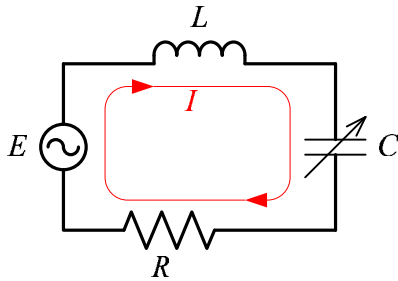


図 1.1: 直列共振回路

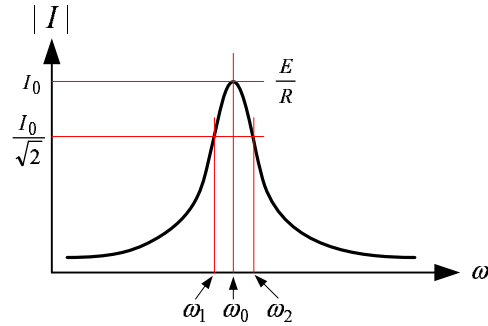


図 1.2: 共振曲線

1.2.2 Q 値の測定方法

ここでは、周波数を一定にして、コンデンサーの容量を変化させた場合の電流を測定して、Q 値を求める。図 1.1 の回路では、

$$|I|^2 = \frac{E^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (1.6)$$

となる。ところで、共振時にはこの式の分母の括弧の中がゼロとなるので、

$$I_0^2 = \frac{E^2}{R^2} \quad (1.7)$$

である。これより、

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{I_0^2 - |I|^2}{|I|^2}} &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \\ &= \frac{1}{\omega R} \frac{C - C_0}{CC_0} \\ &= \frac{1}{\omega RC_0} \frac{\Delta C}{C} \end{aligned} \quad (1.8)$$

ここで、 C_0 は共振時、 C は非共振時のコンデンサーの容量で、 ΔC はその差である。さらに、 $\omega^2 LC_0 = 1$ 、 $1/(\omega RC_0) = \omega L/R$ なので、

$$Q = \sqrt{\frac{I_0^2 - |I|^2}{|I|^2}} \frac{C}{\Delta C} \quad (1.9)$$

となる。ここで、 $|I|$ を図 1.3 のように選ぶと、根号の中が 1 になる。したがって、

$$Q \approx \frac{C_0}{\Delta C} \quad (1.10)$$

となる。コンデンサーの容量を変化させて、図 1.3 を描くことにより、式 1.10 を用いて Q 値を求めることができる。

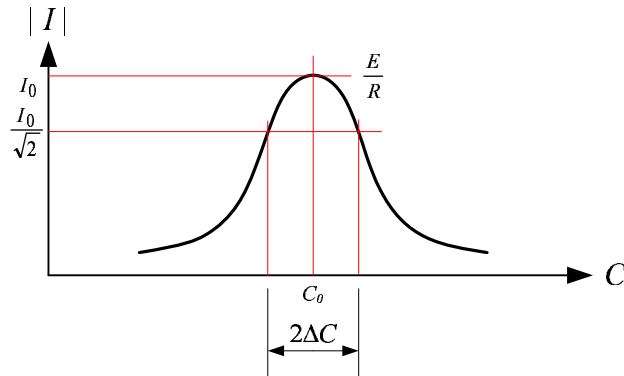


図 1.3: コンデンサーの容量と電流の関係

1.3 実験方法

1.3.1 手順

1. 表 1.1 に示す機器を使って、図 1.4 の実験回路を作る。
 - V_1 と V_2 は 2 台のデジタルマルチメーターと 1 台のオシロスコープで観測する。
 - 使う抵抗は、 $R = 0, 20, 50[\Omega]$ である。 $R = 0$ の場合を最初に測定するが、この場合は抵抗を用いないで、導線を接続する。
 - $20, 50[\Omega]$ については、テスターで抵抗値を確認すること。
2. 周波数を変化させるのではなく、コンデンサーの容量を変化させて共振の様子を調べる。その周波数は次のようにして決める。
 - 可変容量コンデンサー (バリアブルキャパシター) を最大容量の半分程度に固定する。
 - V_2 が最大になるように、発振器 (OSC) の周波数を決める。これが測定に用いる周波数である。この周波数を記録すること。
3. 可変容量コンデンサー容量を変化させて、デジタルマルチメーターで読みとった電圧 V_1 と V_2 を表 1.2 に記録する。
4. 横軸を回路の全容量 C 、縦軸をコイルの 1 次側の電圧が $1[V]$ の場合の電流 $|I'|$ のグラフ (共振曲線) を描く。ただし、

$$|I'| = 2\pi f C \frac{V_2}{V_1} \quad (1.11)$$

である。

5. 共振曲線を描き、式 (1.10) を用いて、 Q 値を求める。
6. 以上の測定を、 $R = 0, 20, 50 [\Omega]$ の場合について行う。

表 1.1: 共振回路の実験に使う機器

装置	メーカー	型番	台数
共振回路実験回路			1
オシロスコープ	KENWOOD	CS-5270	1
デジタルマルチメーター	YEW	Type 2807	2
ファンクションジェネレーター	KENWOOD	FG-273	1
バリャブルキャパシター	YEW	CDS-500	1

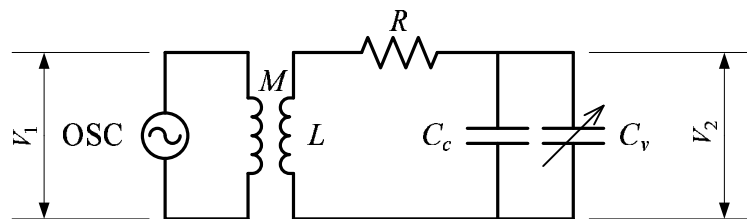


図 1.4: 実験の回路図

表 1.2: 測定結果の表

$f =$ [Hz], $R =$ [Ω]

コンデンサー C_v 目盛り	コンデンサー C_v [pF]	回路全体 C [pF]	電圧 V_1 [V]	電圧 V_2 [V]	回路の電流 $ I' $ [A/V]

1.3.2 注意事項

1. 共振点の近くでは、測定点を細かくとること。
2. R が大きい場合は $|I|$ の変化が小さいので、共振点をはずれて $|I| = |I_0|/\sqrt{2}$ となる領域まで十分に測定範囲を広げること。

1.4 結果

- 測定した全ての項目について、実測値の表を完成させること。

- 測定した全ての項目について、実測値のグラフを作成すること。
- グラフに表した測定結果より共振の鋭さ Q をもとめ、理論値 ($Q = \omega L/R$) と比較すること。

1.5 考察課題

1. 共振曲線の鋭さは回路の何に起因しているか？。
2. Q 値には、共振曲線の鋭さ以外の定義がある。回路で単位時間当たり消費されるエネルギー P とそこに蓄えられるエネルギー U と関係して定義される。エネルギーから定義される Q 値を示せ。実際の問題では、共振の鋭さから Q 値を求めるよりも、このエネルギーから計算する方が易しい。

第2章 LCR回路の過渡応答

2.1 目的

LCR回路にステップ電圧を加えたときの過渡応答現象を測定し、回路の時定数を求める。

2.2 原理

ここで述べている回路の応答の計算は、諸君が現在身につけている数学のレベルを超えている。しかし、結果については学習の範囲内であり、直感的に理解できるであろう。従って、細かい計算は気にしないで、結果を直感的に理解することに努めよ。ただ、結果のみを書いたのでは原理を示したことになるので、退屈であるが正確な記述を示す。

2.2.1 CR回路

図 2.1 に示す CR 回路の過渡応答を考える。ここでは、スイッチが OFF の状態ではコンデンサーに充電されていないものとする。そして、それを ON にした瞬間から電流が流れ、コンデンサーが充電される。その充電電圧が上がり、電源電圧と等しくなると電流は流れなくなり、回路は定常状態におさまる。スイッチを ON にして、定常状態におさまるまでを過渡状態と言う。

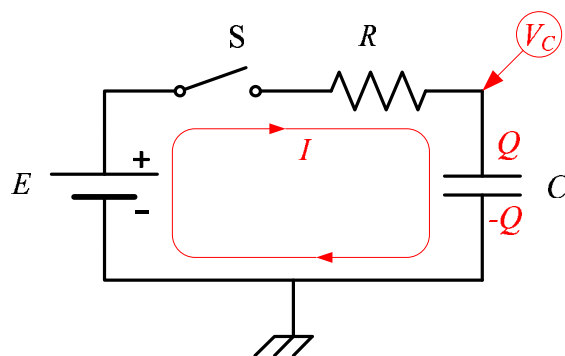


図 2.1: CR 直列回路

電流や電圧、あるいはコンデンサーの片側の電極の電荷量は、時間とともに変化する。その変化を表す式を考える。スイッチ S を ON にした場合、この回路の電圧に関するキルヒホッフの法則は

$$-E + RI + \frac{Q}{C} = 0 \quad (2.1)$$

となる。電荷 Q と電流は、 $I = \frac{dq}{dt}$ の関係がある。この関係式を用いると、式 (2.1) は

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{CR}Q = \frac{E}{R} \quad (2.2)$$

となる。ここで、電荷 Q のみが時間の関数で、残りは定数である。この常微分方程式の一般解¹は、

$$Q = e^{-\frac{t}{CR}} \left[CEe^{\frac{t}{CR}} + c_1 \right] \quad (2.3)$$

である。ここで、 c_1 は任意定数である。

任意定数は初期条件より決めることができる。スイッチ S を ON にした瞬間を $t = 0$ として、そのときの回路の状態を初期条件と言う。ここでの初期条件は、

- $t = 0$ の時、コンデンサーの電荷は $Q = 0$

とする。この条件を先ほどの電荷を表す式に当てはめると、 $c_1 = -CE$ である。したがって、この CR 直列回路のコンデンサーの片側に貯まる電荷は、

$$Q = CE(1 - e^{-\frac{t}{CR}}) \quad (2.4)$$

となる。

電荷 Q の変化が分かったので、回路の電圧や電流を求めることは簡単である。まずは、コンデンサーの電圧は、 $Q = CV$ から簡単に求められ、

$$V_c = E(1 - e^{-\frac{t}{CR}}) \quad (2.5)$$

である。 $t = 0$ の時にはコンデンサーには充電されていないので、電圧は発生していないのである。これは、その瞬間のコンデンサーの抵抗はゼロと考える。一方、回路に流れる電流は $I = \frac{dQ}{dt}$ より、

$$I = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{CR}} \quad (2.6)$$

となる。 $t = 0$ の瞬間、コンデンサーの抵抗はゼロなので、電流は抵抗によってのみ決まるので、 $I(0) = E/R$ となる。

ここで、 $\tau = CR$ を時定数と言い、それはコンデンサーの電圧が定常状態の 63.2% になる時間を表している。

2.2.2 LR 回路

先ほどと同様な手法を用いて、図 2.2 の LR 回路を解析する。これを解析する前に、定性的にその応答を述べておく。スイッチ S を ON にした瞬間、コイルの抵抗は無限大になる。もし無限大にならないと、有限の電流がながれそのときの電流の変化は無限大となる。すると無限大の抵抗となり、電流はゼロにならなくては成らない。これは矛盾である。従って、ON にした瞬間の電流はゼロで、しばらくすると電流が徐々に増加する。電流が増加して行くが、 $I = E/R$ よりも多くの電流が流れることはない。定常状態ではコイルは無視でき、 $I = E/R$ の電流が流れる。

定量的な解析は、キルヒホッフの法則から始める。この回路では、

$$-E + L \frac{dI}{dt} + RI = 0 \quad (2.7)$$

である。CR 回路の解析と同様に、この微分方程式の一般解は、

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left[\frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + c_1 \right] \quad (2.8)$$

¹付録の A.1 節を見よ

となる。ここで、初期条件 ($t = 0$ の時、 $I = 0$) を用いると、任意定数は $c_1 = -R/E$ となる。したがって、回路に流れる電流は、

$$I = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad (2.9)$$

となる。一方、抵抗の電圧は

$$\begin{aligned} V_R &= IR \\ &= E \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

である。

電流や電圧が定常状態の 63.2% になる時間を時定数と言い、それは $\tau = L/R$ である。

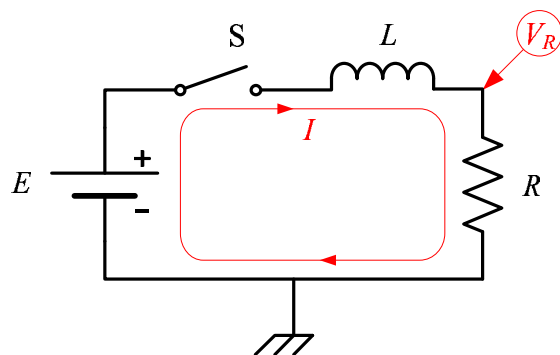


図 2.2: LR 直列回路

2.2.3 LCR 回路

2.2.3.1 一般解

図 2.3 の LCR 回路を解析する。これを定性的に理解することはなかなか難しいが、少し考えてみる。まずは、コイルがあるためスイッチを入れた瞬間の電流はゼロで徐々に立ち上がると想像できる。途中経過は分からないが、最後にはコンデンサーが電源電圧 E まで充電され、定常状態になると思われる。

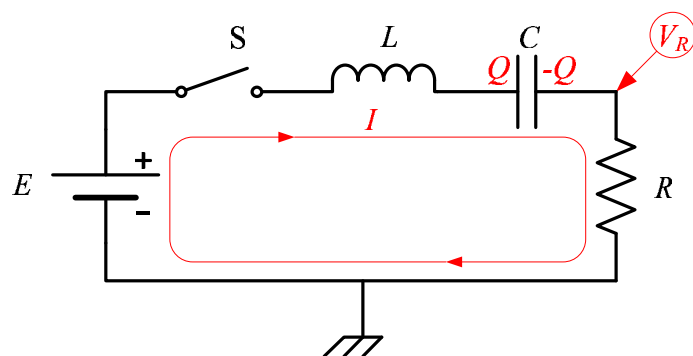


図 2.3: LCR 直列回路

定性的に分かりにくい場合は、定量的に評価するしかない。キルヒホッフの法則から、

$$-E + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI = 0 \quad (2.11)$$

が導かれる。CR 回路の解析と同様に $I = dQ/dt$ なので、説くべき微分方程式は

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = \frac{E}{L} \quad (2.12)$$

となる。付録 A.2 に示しているように、この微分方程式の解は

$$Q = \begin{cases} CE + c_1 \exp \left[\left(-\frac{R}{2L} + \frac{i}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \right) t \right] + c_2 \exp \left[\left(-\frac{R}{2L} - \frac{i}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \right) t \right], & \frac{4L}{C} - R^2 \neq 0 \text{ のとき} \\ CE + (c_1 + c_2 t) \exp \left(-\frac{R}{2L} t \right), & \frac{4L}{C} - R^2 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (2.13)$$

となる。ここで、 c_1 と c_2 は未知定数で、初期条件によって決める。ここでは、それは

- $t=0$ のとき、 $Q=0$
- $t=0$ のとき、 $I=0$

とする。

2.2.3.2 減衰振動

未知定数 c_1 と c_2 をもとめて、回路の応答を考えるが、ここでは $\frac{4L}{C} - R^2 \geq 0$ 、すなわち $R^2 \leq 4L/C$ の場合を考える。このときの回路の応答は、式 (2.13) の最初の解によって示される。これから、未知定数を求めるが、式が長いので

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (2.14)$$

$$\beta = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \quad (2.15)$$

とする。すると、

$$Q = CE + c_1 e^{(-\alpha + \beta i)t} + c_2 e^{(-\alpha - \beta i)t} \quad (2.16)$$

である。これを微分して、電流は

$$I = c_1 (-\alpha + \beta i) e^{(-\alpha + \beta i)t} + c_2 (-\alpha - \beta i) e^{(-\alpha - \beta i)t} \quad (2.17)$$

となる。初期条件から、

$$\begin{cases} CE + c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 (-\alpha + \beta i) + c_2 (-\alpha - \beta i) = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

の連立方程式が成り立つ。この連立方程式の解は、

$$c_1 = \frac{CE}{2} \left(-1 + \frac{\alpha}{\beta} i \right) \quad c_2 = \frac{CE}{2} \left(-1 - \frac{\alpha}{\beta} i \right) \quad (2.19)$$

となる。これを用いると、回路に流れる電流やコンデンサーの電荷の変化が分かる。ここで、興味があるのは、図 2.3 に示されている電圧なので、それを電流から求めることにする。回路に流れる電流 I は、この c_1 と c_2 を式 (2.17) に代入すればよい。オイラーの公式²を使うと、それは、

$$I = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \quad (2.20)$$

²オイラーの公式は、 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ である。

となる。これから、図 2.3 に示されている電圧は、

$$V_R = IR \quad (2.21)$$

$$= \frac{2\alpha}{\beta} E e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \quad (2.22)$$

となる。これは振動項 $\sin(\beta t)$ と減衰項 $e^{-\alpha t}$ の積の形になっており、このような場合を減衰振動と言う。

2.2.3.3 過減衰

次に、 $\frac{4L}{C} - R^2 \leq 0$ 、すなわち $R^2 \geq 4L/C$ の場合を考える。先ほど同様、回路の応答は、式 (2.13) の最初の解によって示される。この式は長いので

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (2.23)$$

$$\gamma = \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \quad (2.24)$$

とする。後は、減衰振動の場合と全く同じように計算を進めれば良い。しかし、 $\gamma = \beta i$ に気が付けば、減衰振動の解を利用することができる。すなわち、式 (2.22) の β を $-\gamma i$ に書き直せば良い。これから、図 2.3 に示されている電圧は、

$$V_R = \frac{2\alpha}{-\gamma i} E e^{-\alpha t} \sin(-\gamma i t) \quad (2.25)$$

$$= \frac{2\alpha}{\gamma} E e^{-\alpha t} \sinh(\gamma t) \quad (2.26)$$

となる³。この場合、振動しないで減衰する。これを過減衰と言う。

2.2.3.4 臨界減衰

次に、 $\frac{4L}{C} - R^2 = 0$ 、すなわち $R^2 = 4L/C$ の場合を考える。回路の応答は、式 (2.13) の 2 番目の解によって示される。この式は長いので

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (2.27)$$

とする。従って、

$$Q = CE + (c_1 + c_2 t) e^{-\alpha t} \quad (2.28)$$

である。

減衰振動の場合と全く同じように、初期条件から未知定数を決める。まずはじめに、 $t = 0$ のとき $Q = 0$ の条件から、 $c_1 = -CE$ となる。従って、

$$Q = CE + (-CE + c_2 t) e^{-\alpha t} \quad (2.29)$$

となる。これから、電流は

$$I = (c_2 + \alpha CE - \alpha c_2 t) e^{-\alpha t} \quad (2.30)$$

³ $\sin \theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}$ と $\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$ を利用して計算する。

となる。 $t = 0$ のとき $I = 0$ の条件から、 $c_2 = -\alpha CE$ となる。元々の条件、 $R^2 = 4L/C$ を上手に使い、整理すると

$$I = \frac{E}{L}te^{-\alpha t} \quad (2.31)$$

が得られる。これから、

$$V_R = \frac{RE}{L}te^{-\alpha t} \quad (2.32)$$

$$= 2\alpha Ete^{-\alpha t} \quad (2.33)$$

となる。これは臨界減衰と呼ばれる。

2.3 実験方法

2.3.1 測定器

ここでは、表 2.1 に示す装置で測定を行う。

表 2.1: 測定器

装置	メーカー	型番	台数
LCR 過渡応答実験装置			1
ストップウォッチ			1
オシロスコープ	KENWOOD	CS-5279	1
直流電源	KENWOOD	PA18-1.2A	1
ファンクションジェネレーター	ナショナル	VP-7402A	1
デジタルマルチメーター	YEW	Type 2807	1

2.3.2 CR 回路の過渡応答

2.3.2.1 時定数が長い場合

- 図 2.4 の回路を作成する。
 - 電圧 V_C は、デジタルマルチメータで測定する。
 - 電源電圧 E は、直流 10[V] 程度とする。
 - コンデンサーは、20[μ F] 程度の電解コンデンサーを使用する。これには極性があるので注意すること。また、テスターで電圧を測定して、充電されているようであれば、1[k Ω] 程度の抵抗を介して放電させること。
 - 抵抗は 1[M Ω] 程度のものを用いる。
- コンデンサーの容量を記録する。併せて、抵抗値も測定して記録する。
- 時定数 τ を求める。時定数は、 $\tau = CR$ である。
- コンデンサーの電圧がゼロであることを確認してスイッチを ON にする。

5. 132 秒まで 3 秒毎に電圧を測定し、表 2.2 のように記録する。
6. 時定数の 5 倍以上の時間が経過した後、コンデンサーの電圧を測定し、それを電源電圧 E とする。これも記録すること。
7. 理論値を次式により計算し、表に記入する。

$$V_C = E(1 - e^{-\frac{t}{CR}}) \quad (2.34)$$

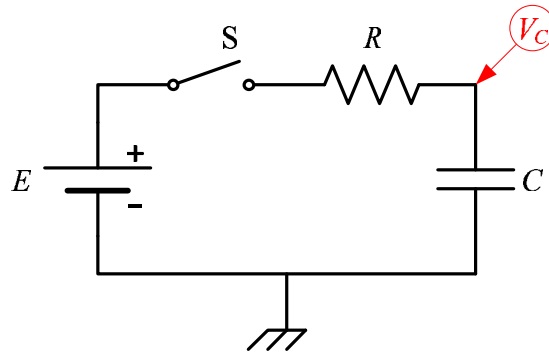


図 2.4: CR 直列回路の過渡応答測定

表 2.2: CR 回路の過渡応答 (τ が大きいとき)

E= [V], C= [F], R= [Ω]

時間 t [sec]	電圧 V_C [V]		時間 t [sec]	電圧 V_C [V]		時間 t [sec]	電圧 V_C [V]	
	理論値	実測値		理論値	実測値		理論値	実測値
0			45			90		
3			48			93		
6			51			96		
9			54			99		
12			57			102		
15			60			105		
18			63			108		
21			66			111		
24			69			114		
27			72			117		
30			75			120		
33			78			123		
36			81			126		
39			84			129		
42			87			132		

2.3.2.2 時定数が短い場合

1. 図 2.5 の回路を作成する。
 - 電圧 V_C と V_E は、オシロスコープで測定する。
 - 発振器 OSC は、矩形波を発生させる。振幅は 1[V] 程度とする。50%のデューティで、繰り返しは時定数の 20 倍以上とする。
 - コンデンサーは、1[nF] 程度の電解コンデンサーを使用する。
 - 抵抗は 10[k Ω] 程度のものを用いる。
2. コンデンサーの容量を記録する。併せて、抵抗値も測定して記録する。
3. 時定数 τ を求める。
4. オシロスコープの波形を表 2.3 に記録する。
5. 時定数の 5 倍以上の時間が経過した後、コンデンサーの電圧を測定し、それを電源電圧 E とする。これも記録すること。
6. 理論式を計算し、表に記録する。

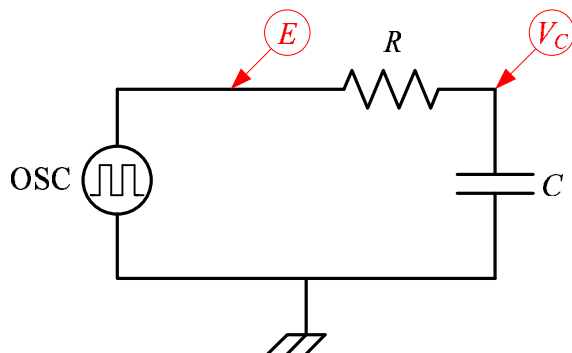


図 2.5: CR 直列回路の過渡応答測定

表 2.3: CR 回路の過渡応答 (τ が小さいとき)

E=	[V]	時間 t [μsec]	電圧 V_C [V]	
C=	[F]		理論値	実測値
R=	[Ω]			

2.3.3 LR 回路の過渡応答

1. 図 2.6 の回路を作成する。
 - 電圧 V_R と V_E は、オシロスコープで測定する。
 - 発振器 OSC は、矩形波を発生させる。振幅は 1[V] 程度とする。50%のデューティで、繰り返しは時定数の 20 倍以上とする。
 - コイルは、9[mH] 程度のものを使用する。
 - 抵抗は 50[Ω] 程度のものを用いる。
2. コイルのインダクタンス L を記録する。併せて、コイルの抵抗 R_L も測定して記録する。
3. 抵抗の抵抗値 R_0 を測定して、結果を記録する。

4. 時定数 τ を求める。 $\tau = L/(R_L + R_0)$ である。
5. オシロスコープの波形を観測し、抵抗の電圧 V_R を表 2.4 に記録する。
6. 時定数の 5 倍以上の時間が経過した後、抵抗の電圧 V_R を測定し、それを電源電圧 E とする。これも記録すること。
7. 理論式を計算し、表に記録する。

$$V_R = \frac{R_0}{R_L + R_0} E (1 - e^{-\frac{R_L + R_0}{L} t}) \quad (2.35)$$

8. 以上の測定を、抵抗 $R_0 = 50[\Omega]$ に引き続き、 $100[\Omega]$ と $1000[\Omega]$ でも実施する。

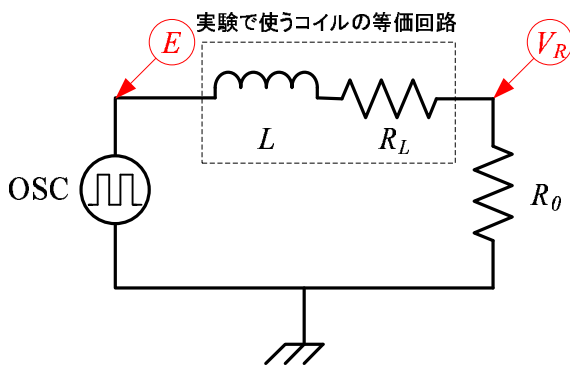


表 2.4: LR 回路の過渡応答

E=	[V]	時間 t	電圧 V_C [V]	
L=	[H]	[μ sec]	理論値	実測値
R_0 =	[Ω]			
R_L =	[Ω]			

図 2.6: LR 直列回路の過渡応答測定

2.3.4 LCR 回路の過渡応答

2.3.4.1 過減衰

1. 図 2.7 の回路を作成する。
 - 電圧 V_R と V_E は、オシロスコープで測定する。
 - 発振器 OSC は、矩形波を発生させる。振幅は $1[V]$ 程度とする。50%のデューティで、繰り返しは時定数の 20 倍以上とする。
 - コイルは、 $L=9[mH]$ 程度のものを使用する。
 - コンデンサーは、 $C=0.5[\mu F]$ 程度のものを使用する。
 - 抵抗は、 $R_0=1[k\Omega]$ 程度のものを用いる。
2. コイルのインダクタンス L を記録する。併せて、コイルの抵抗 R_L も測定して記録する。
3. コンデンサーの容量 C を記録する。
4. 抵抗の抵抗値 R_0 を測定して、結果を記録する。
5. オシロスコープの波形を観測し、抵抗の電圧 V_R を表 2.5 に記録する。
6. 波形が十分安定した後、電源の電圧 E を測定し、それを記録する。

7. 理論式を計算し、表に記録する。

$$V_R = \frac{R_0}{\gamma L} E e^{-\alpha t} \sinh(\gamma t) \quad (2.36)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{R_L + R_0}{2L} \quad (2.37)$$

$$\gamma = \frac{1}{2L} \sqrt{(R_L + R_0)^2 - \frac{4L}{C}} \quad (2.38)$$

である。

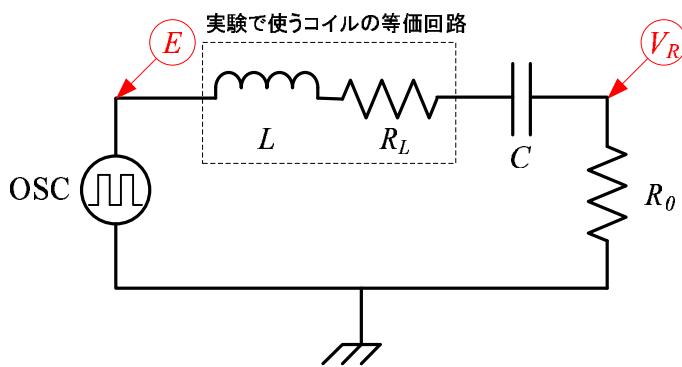


図 2.7: LCR 直列回路の過渡応答測定

表 2.5: LCR 回路の過渡応答

E=	[V]	時間 t [μsec]	電圧 V_C [V]	
L=	[H]		理論値	実測値
C=	[F]			
R_L =	[Ω]			
R_0 =	[Ω]			

2.3.4.2 臨界減衰

1. 図 2.7 の回路を作成する。

- 電圧 V_R と V_E は、オシロスコープで測定する。
- 発振器 OSC は、矩形波を発生させる。振幅は 1[V] 程度とする。50%のデューティで、繰り返しは時定数の 20 倍以上とする。
- コイルは、 $L=9[\text{mH}]$ 程度のもを使用する。
- コンデンサーは、 $C=30[\text{nF}]$ 程度のもを使用する。
- 抵抗は、 $R_0=1[\text{k}\Omega]$ 程度のもを用いる。

2. コイルのインダクタンス L を記録する。併せて、コイルの抵抗 R_L も測定して記録する。

3. コンデンサーの容量 C を記録する。

4. 抵抗の抵抗値 R_0 を測定して、結果を記録する。

5. オシロスコープの波形を観測し、抵抗の電圧 V_R を表 2.5 に記録する。

6. 波形が十分安定した後、電源の電圧 E を測定し、それを記録する。

7. 理論式を計算し、表に記録する。

$$V_R = \frac{R_0}{L} E t e^{-\alpha t} \quad (2.39)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{R_L + R_0}{2L} \quad (2.40)$$

$$(2.41)$$

である。

2.3.4.3 減衰振動

1. 図 2.7 の回路を作成する。

- 電圧 V_R と V_E は、オシロスコープで測定する。
- 発振器 OSC は、矩形波を発生させる。振幅は 1[V] 程度とする。50%のデューティで、繰り返しは時定数の 20 倍以上とする。
- コイルは、 $L=9[\text{mH}]$ 程度のもを使用する。
- コンデンサーは、 $C=1[\text{nF}]$ 程度のもを使用する。
- 抵抗は、 $R_0=1[\text{k}\Omega]$ 程度のもを用いる。

2. コイルのインダクタンス L を記録する。併せて、コイルの抵抗 R_L も測定して記録する。

3. コンデンサーの容量 C を記録する。

4. 抵抗の抵抗値 R_0 を測定して、結果を記録する。

5. オシロスコープの波形を観測し、抵抗の電圧 V_R を表 2.5 に記録する。

6. 波形が十分安定した後、電源の電圧 E を測定し、それを記録する。

7. 理論式を計算し、表に記録する。

$$V_R = \frac{R_0}{\beta L} E e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \quad (2.42)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{R_L + R_0}{2L} \quad (2.43)$$

$$\beta = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - (R_L + R_0)^2} \quad (2.44)$$

である。

2.4 結果

- 測定した全ての項目について、理論値と実測値の表を完成させること。
- 測定した全ての項目について、理論値と実測値のグラフを作成すること。
- グラフに表した測定結果より時定数 τ をもとめ、理論値と比較すること。
- LCR 回路で振動する場合の波形より、周期 T を求め、理論値と比較すること。

2.5 考察課題

1. キルヒホッフの法則を説明せよ。
2. コイルとコンデンサー、抵抗の構造を調べよ。
3. コイルとコンデンサー、抵抗の両端に発生する電位差と電流の関係を示せ。

第3章 CR回路の周波数応答

3.1 目的

CR直列回路の周波数応答特性を測定し、そのフィルター特性、および微分・積分特性を理解する。

3.2 原理

図3.1のようなCR直列回路に交流電圧 V を加えたとき、抵抗およびコンデンサーの両端の電圧

$$\begin{aligned}V_R &= \frac{i\omega CR}{1+i\omega CR}V \\ &= \frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau}V\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}V_C &= \frac{1}{1+i\omega CR}V \\ &= \frac{1}{1+i\omega\tau}V\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\tag{3.3}$$

となる。ここで、 V_R が抵抗、 V_C がコンデンサー両端の電圧である。 τ は時定数で、 $\tau = CR$ と定義する。ここで、 $\omega\tau$ が1に比べて十分小さい場合、抵抗両端の電圧 V_R は電源電圧の微分となる。また、コンデンサーの電圧 V_C は電源電圧の積分となる。

素子間の電圧を電源電圧との比 [dB] であらわす、

$$G_R = 20 \log_{10} \left(\frac{|V_R|}{|V|} \right)\tag{3.4}$$

$$G_C = 20 \log_{10} \left(\frac{|V_C|}{|V|} \right)\tag{3.5}$$

となる。これを、周波数 $f = \omega/(2\pi)$ を横軸に、 G_R と G_C を縦軸にしてグラフに描くと、図3.2のような特性曲線が得られる。

同様に、電源との位相差は、

$$\begin{aligned}\theta_R &= \arctan \left[\frac{\Im(V_R/V)}{\Re(V_R/V)} \right] \\ &= \arctan \left(\frac{1}{\omega CR} \right)\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\theta_C &= \arctan \left[\frac{\Im(V_C/V)}{\Re(V_C/V)} \right] \\ &= \arctan(\omega CR)\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\tag{3.8}$$

となる。 \Re は実数部、 \Im は虚数部を表す。これをグラフに描くと、図3.2のような特性曲線になる。

この図中の f_c は $V_R = V_C = V/\sqrt{2}$ となる周波数で、これを CR 回路の遮断周波数と言う。このとき、位相差は、 $\theta_R = \theta_C = \pi/4$ [rad]=45 [deg] となる。

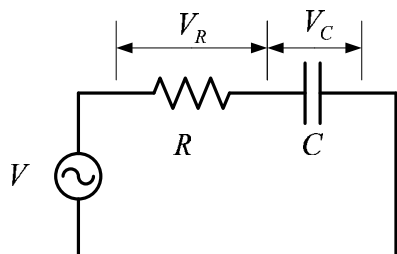


図 3.1: CR 回路

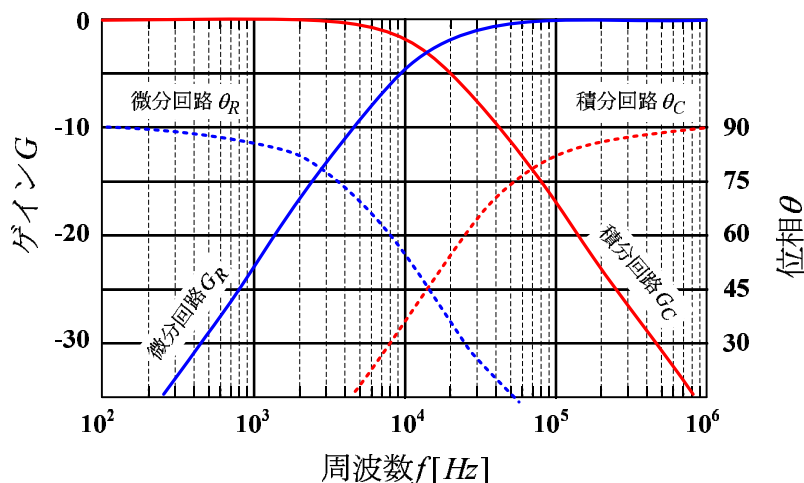


図 3.2: ゲインと位相 ($C=0.001[\mu\text{F}]$, $R=10[\text{k}\Omega]$)

3.3 実験方法

3.3.1 周波数応答

3.3.1.1 微分回路

1. 表 3.1 の機器を図 3.3 のように接続する。
2. 発振器の周波数を 100[Hz] の正弦波にする。
3. 発振器の出力電圧 (実効値) が $V_1 = 1[\text{V}]$ になるように、デジタルマルチメータを見ながら調整する。
4. オシロスコープのリサージュ図形を適当な大きさに調整し、図 3.5 の x, X あるいは y, Y をカーソル機能によって測定し、位相角 θ_R を次式

$$\sin \theta_R = \frac{x}{X} = \frac{y}{Y} \quad (3.9)$$

から求める。

5. 同時にデジタルマルチメータの電圧 V_1, V_2 を記録する。そして、利得 G_R を

$$G_R = 20 \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad [\text{dB}] \quad (3.10)$$

から算出する。

6. 以上の測定を次に周波数 [HZ] について繰り返す。
200, 400, 600, 800, 1k, 1.5k, 2k, 3k, 4k, 5k, 6k, 7k, 8k, 9k,
10k, 20k, 40k, 60k, 80k, 100k, 200k

注意

- 低い周波数領域での微分回路の実験では、リサージュ図形の x と X 、あるいは y と Y の区別がつかない (ほとんど同じ)。そのため、2[kHz] 以下の位相角の測定は省く。

3.3.1.2 積分回路

1. 表 3.1 の機器を図 3.4 のように接続する。
2. 発振器の周波数を 100[Hz] の正弦波にする。
3. 発振器の出力電圧 (実効値) が $V_1 = 1[V]$ になるように、デジタルマルチメータを見ながら調整する。
4. オシロスコープのリサージュ図形を適当な大きさに調整し、図 3.5 の x, X あるいは y, Y をカーソル機能によって測定し、位相角 θ_R を次式

$$\sin \theta_R = \frac{x}{X} = \frac{y}{Y} \quad (3.11)$$

から求める。

5. 同時にデジタルマルチメータの電圧 V_1, V_2 を記録する。そして、利得 G_C を

$$G_C = 20 \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad [\text{dB}] \quad (3.12)$$

から算出する。

6. 以上の測定を次に周波数 [HZ] について繰り返す。
500, 1k, 2k, 4k, 6k, 8k, 10k, 12k, 14k, 16k, 18k, 20k, 30k,
40k, 50k, 60k, 80k, 100k, 200k

[注意]

- 高い周波数領域での積分回路の実験では、リサージュ図形の x と X 、あるいは y と Y の区別がつかない (ほとんど同じ)。そのため、80[kHz] 以上の位相角の測定は省く。

表 3.1: 実験に使う機器

装置	メーカー	型番	台数
CR 回路実験実習回路			
オシロスコープ	KENWOOD	CS-5370	1
ファンクションジェネレーター	KENWOOD	FG-273	1
デジタルマルチメータ	YEW	Type 2807	2

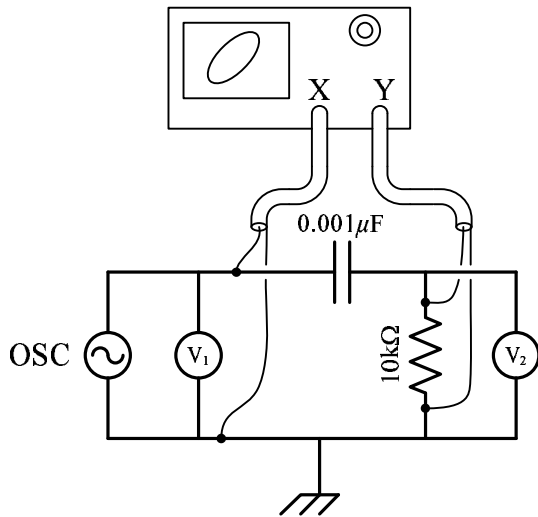


図 3.3: 微分回路の周波数応答の測定

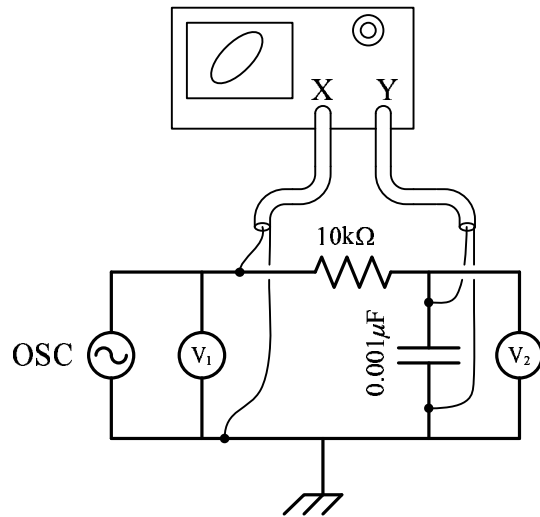


図 3.4: 積分回路の周波数応答の測定

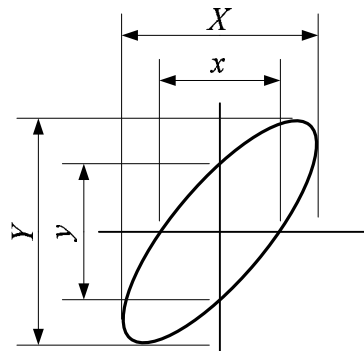


図 3.5: 位相を求めるときのリサージュ図形

3.3.2 時間応答

3.3.2.1 微分回路

1. 図 3.6 のように接続して、実験の回路を作成する。
2. 回路のパラメーターを表 3.2 のように変化させて、電源の波形と抵抗の両端 (微分回路) の波形を観測する。抵抗両端の波形を記録すること。

3.3.2.2 積分回路

1. 図 3.7 のように接続して、実験の回路を作成する。
2. 回路のパラメーターを表 3.2 のように変化させて、電源の波形とコンデンサーの両端 (微分回路) の波形を観測する。コンデンサー両端の波形を記録すること。

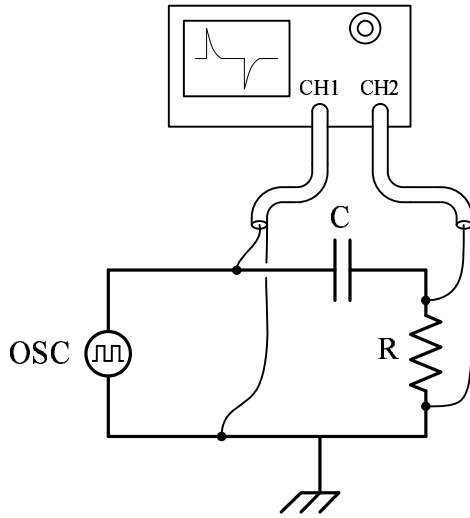


図 3.6: 微分回路の時間応答の測定

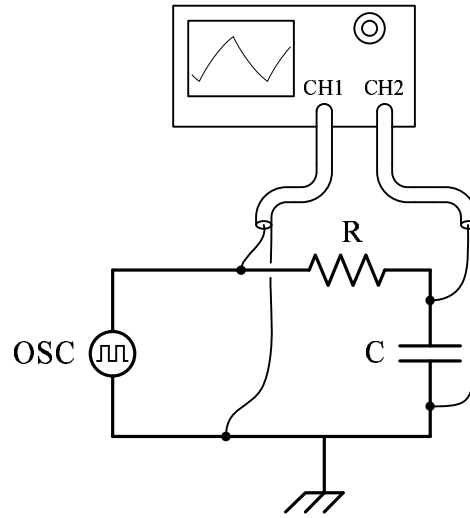


図 3.7: 積分回路の時間応答の測定

表 3.2: CR 回路の時間応答

波形	繰り返し周波数 [Hz]	抵抗 [Ω]	コンデンサー [μF]
正弦波 三角波 矩形波	1k	10k	0.001
正弦波 三角波 矩形波	1k	10k	0.01
正弦波 三角波 矩形波	1k	10k	0.1
正弦波 三角波 矩形波	1k	10k	1

3.4 結果

3.4.1 周波数応答

例えば、微分回路の場合は、表 3.3 のように記録し、このデータから原理で述べた特性曲線を描く。また、これにならって積分回路の場合も、記録されたデータから特性曲線を描く (片対数方眼紙に全ての曲線を描くこと)。

表 3.3: 微分回路の測定結果の表

$C =$ [F], $R =$ [Ω]

周波数 f [Hz]	入力電圧 V_1 [V]	出力電圧 V_2 [V]	リサージュ図形		位相角 θ_R [deg]		利得 G_R [dB]	
			Y [V]	y [V]	理論値	実測値	理論値	実測値

3.4.2 周波数応答

- $\omega\tau$ と微分回路の出力波形の描け。
- $\omega\tau$ と積分回路の出力波形を描け。

ただし、

$$\omega = 2\pi \times \text{繰り返し周波数} \quad (3.13)$$

とする。

3.5 考察課題

1. 周波数応答で測定したそれぞれの回路の遮断周波数はいくらか?。また、そのときの利得はいくらか?。計算値と実測値を比較せよ。
2. 両方の回路の利得が同じ値になる周波数はいくらか?。計算値と実測値を比較し、このときの V_1 と V_2 の位相差を調べよ。

第4章 トランジスタの静特性の測定

4.1 目的

接合形トランジスタの静特性を測定して特性曲線を描き、その基礎動作と特性曲線との関係を理解する。

4.2 原理

4.2.1 真性半導体

一般に物質は電気の通しやすさという点に注目すれば、電気を通しやすい導体、通しにくい絶縁物、およびその中間に位置する半導体の三つに大別される。そして、半導体には電気伝導が主にイオンによって行われるイオン伝導性半導体と電子によって行われる電子伝導性半導体がある。

接合形トランジスタは電子伝導性半導体を接合する構造になっているので、以下にその仕組みの概要を述べる。純粋な半導体としてはゲルマニウム (Ge) やシリコン (Si) がよく知られているので、Ge を例にとって説明する。

純粋な Ge の単結晶は図 4.1 のようなダイヤモンド構造と呼ばれる極めて安定な結晶構造をしている。4 族の元素であるから 4 個の価電子を持っているが、これらの価電子がそれぞれ 4 個の隣の原子の方へ一個ずつ配置され、同時に 4 個の隣の原子からも 1 個ずつの価電子がこの方向に配置されて、2 個の価電子を隣同士で共有結合することになる。

図 4.2 はこの様子を平面化して描いたものではあるが、Ge の単結晶中には常温でも極めてわずかではあるが、価電子が飛び出している。そして、光や熱のエネルギーによって飛び出した電子が伝導電子 (自由電子) となって半導体の性質を現すのである。

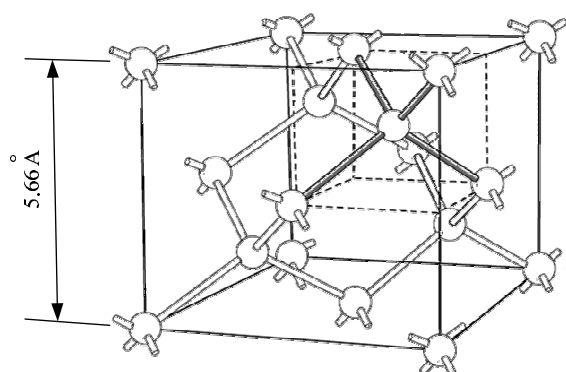


図 4.1: ゲルマニウムの結晶構造

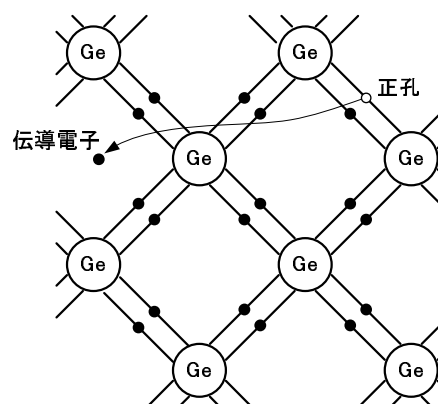


図 4.2: ゲルマニウム中の電子と正孔

このように価電子が伝導電子になって飛び出したあとには共有結合部に伝導電子と同数の電子の抜けた穴を生ずるが、この穴は電気的中性の所から負電荷を持った価電子が伝導電子となって飛び出すから正の電

荷を持つことになる。これを正の電荷を持つ穴という意味で正孔 (positive hole) と言う。したがって、純粋な半導体では伝導電子と正孔の数は全く等しい。このように不純物を含まない半導体を真性半導体と言う。

半導体の中にこのような正孔を生ずると、この正孔は近くの他の共有結合部から価電子を奪い取って中性になり、奪い取られた所にまた正孔を生ずる。以下同様の過程を順に繰り返して、正孔は図のように結晶内を比較的自由に動き回ると考えられる。そして、もしこれに電界が加えられると、この穴は伝導電子と反対の方向に動く。すなわち、電気伝導現象に関しては、この穴は見掛け上電子と同じ大きさの反対符号の電荷を持ち、ほぼ同程度の質量を持つ粒子のような行動をとると考えてよい。

したがって半導体中の伝導は正確には電子の移動によるものであるが、結果的には伝導電子 (自由電子) と正孔の二つが電荷を運ぶと考えることができる。これらは電荷を運ぶという意味でキャリア (carrier) とも呼ばれ、一般的には正孔は○印、電荷は●印で表すことが多い。

4.2.2 不純物半導体

純粋半導体の単結晶中に微量の不純物を混入した物を不純物半導体と言う。そして、不純物半導体は混入する不純物の種類によって N 型半導体と P 型半導体とに分けられ、トランジスタはこれら 2 種類の半導体を巧みに組み合わせた物である。

4.2.2.1 N 型半導体

純粋な Ge の単結晶に、例えば 5 価のヒ素 (As) を極めて微量 (Ge 原子 10^7 個の中に As 原子 1 個程度) 混入したとすれば、As の価電子 5 個のうち 4 個は隣接する Ge の 4 個の価電子と共有結合を形成するが、初めから 1 個だけが共有にあずからない伝導電子として残る (4.3)。この電子は常温の熱エネルギーでも比較的自由に運動することができ、伝導電子が移動すればこの As 原子は正イオンになる。このように共有結合にあずからない余分の伝導電子を与える不純物をドナー (donor) 不純物または単にドナーと言う。そして、このような不純物の混入された半導体を N 型半導体と言う。

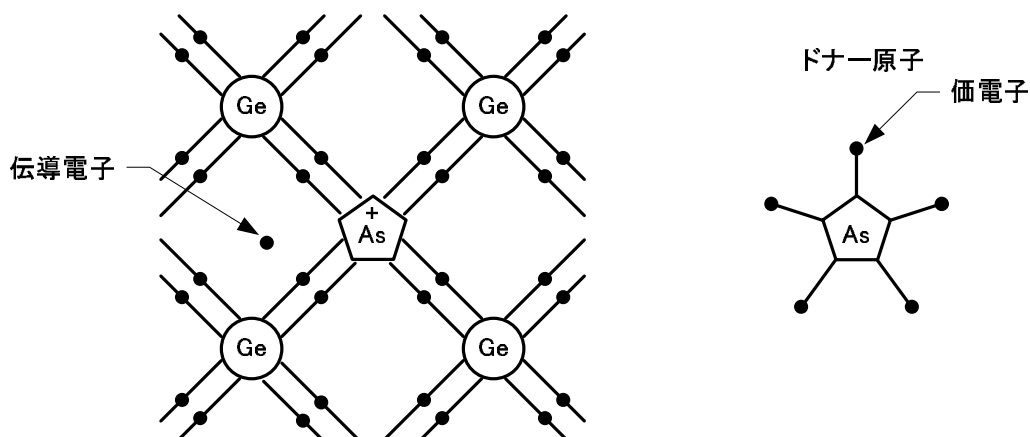


図 4.3: Ge に As を添加した N 形半導体

4.2.2.2 P 型半導体

純粋な Ge の単結晶に、例えば 3 価のインジウム (In) を極めて微量混入したとすれば、In の価電子は 3 個だけであるから、隣接する 4 個の Ge と共有結合しようとしても、共有結合に一箇所だけ電子が不足す

る空所が生ずる (図 4.4)。この穴は他の原子の伝導電子が近付けばこの中に電子を受け入れ、In 原子は負イオンになる。この場合、伝導電子の抜けた穴は前述の正孔になる。このように混入することによって半導体の中に正孔が多くなる不純物をアクセプタ (acceptor) 不純物または単にアクセプタと言う。そして、このような半導体を P 型半導体と言う。以上のように半導体の電気伝導は伝導電子 (以下単に電子という) によるものと正孔によるものとの 2 種類があり、純粋な半導体では電子と正孔とが同数であるが、これに不純物が混入された N 型半導体ではキャリアとしての電子の方が多く、P 型半導体では、正孔のほうが多い。この場合多い方のキャリアを多数キャリア (majority carrier), 少ない方のキャリアを少数キャリア (minority carrier) という。

このように不純物半導体の内部には多数キャリアと少数キャリアが同時に存在し、これが PN 接合の性質やトランジスタの機能に極めて重要な働きをしている。

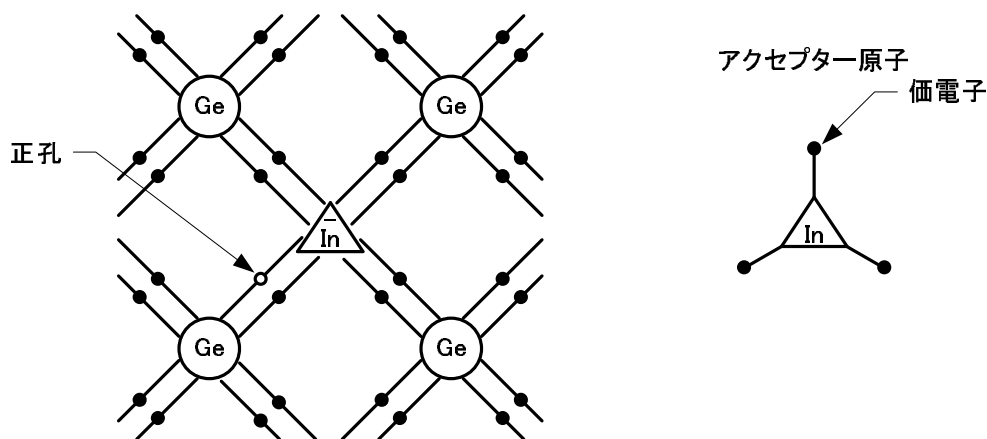


図 4.4: Ge に In を添加した P 形半導体

4.2.2.3 PN 接合の働き

一つの単結晶において図 4.5 のような接合面を堺にして一方が P 型、他方が N 型になっている半導体を PN 接合 (PN junction) と言い、このような接合は整流作用を表す。以下にこの整流作用の原理について述

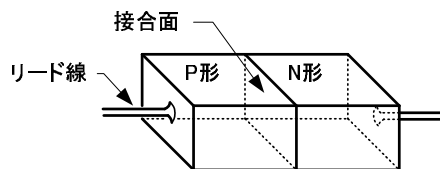


図 4.5: PN 接合の模式図

べる。図 4.6 の左図は無電圧の状態、P 領域と N 領域にはそれぞれ多数キャリアとしての正孔と電子が点存在している。実際には、キャリアー以外に、図 4.6 の右図のように、P 型半導体中には正孔のすぐそばに 3 価の負に帯電したアクセプタ原子があり、一方 N 型半導体中には電子のすぐそばに 5 価の正に帯電したドナーがある。そして全体で電氣的に中和した PN 接合を造っているのである。そして、N 形半導体内部の電子は P 形半導体へ、P 形半導体内部の正孔は N 形半導体へ拡散する。そうすると、各々の電子と正孔は再結合して消滅する。そして、キャリアーが無く、移動できない正負の原子がある空乏層が形成される (図 4.7)。図に示すように、空乏層内はキャリアーは無いが電荷が存在するので、電圧 (ポテンシャル) 差が発

生ずる。こうなると、拡散によるキャリアの移動ができるなる。

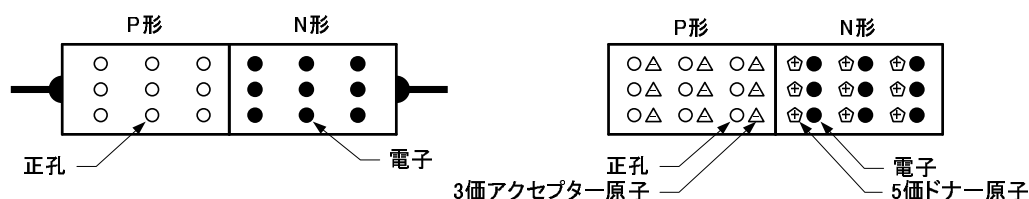


図 4.6: P 形 N 形半導体内の多数キャリアー

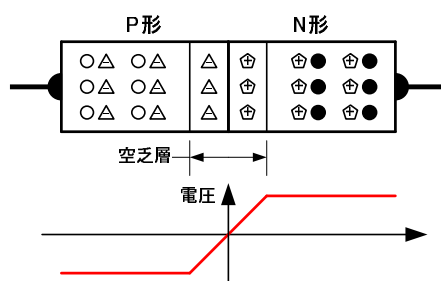


図 4.7: PN 接合の空乏層

次に PN 間に電圧を加えた場合について考えてみよう。図 4.8 は P 型に負、N 型に正の電位になるように電圧を加えた場合である。こうすると、N 領域の電子と P 領域の正孔は互いに反対方向に移動して、空乏層が広がる。空乏層が広がり、そこでのポテンシャル障壁 (電圧) も高くなる。このような状況ではキャリアーは移動することができず、電流はほとんど流れない¹。このような電圧のかけ方を逆方向電圧、あるいは逆バイアスと言う。

次にこれとは反対に図 4.11 のように電圧を印可する。こうすると、図のように接合面に向かって多数キャリアーが移動する。こうなると、空乏層が狭くなり、ポテンシャル障壁も低くなる。すると、多数キャリアーが接合面を越えて移動できるようになり、電流が流れる。この外部電池の接続の仕方を順方向電圧をかけたといい、この電圧を順方向電圧または順方向バイアス電圧という。また、このときの電流の流れる方向の抵抗を順方向抵抗と言う。

以上のように、PN 接合型半導体の両端に交流電圧が加えられると、順方向の電圧が加わったときだけ P から N へ電流が流れ、反対の電圧が加わったときには電流は流れない、いわゆる整流作用がおこなわれたのである。このような整流作用を持つ素子をダイオードという。

4.2.2.4 PNP 接合の働き

前述の PN 接合の N 側にもう一つ P 型をつけた PNP 接合 (図 4.10) について述べる。この場合一方の P 型をエミッタ E、他方の P 型をコレクタ C、中央の N 型をベース B と呼ぶ。図 4.11 は電圧を加えない状態で P 型領域と N 型領域にはそれぞれ正孔と電子が多数キャリアーとして存在している様子を示している。

この状態で、図 4.12 のようにエミッター E に正、コレクタ C に負の電圧を加える。E-B 間は順方向であるが、B-C 間は逆方向なので、E と C との間にはほとんど電流が流れない。次に図 4.13 のようにベース B

¹少数キャリアーの移動はあるので、わずかであるが電流は流れる

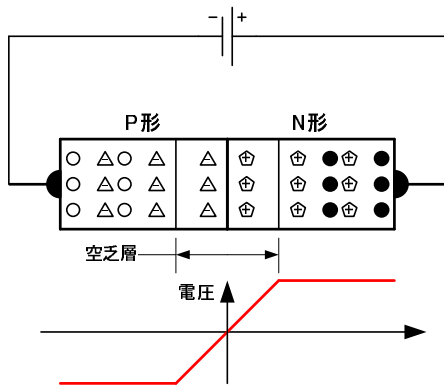


図 4.8: 逆方向に電圧を加えた場合

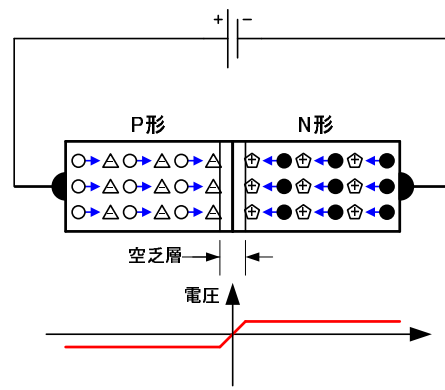


図 4.9: 順方向に電圧を加えた場合

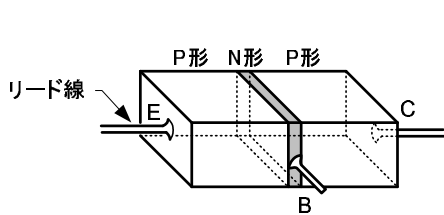


図 4.10: トランジスタの模式図

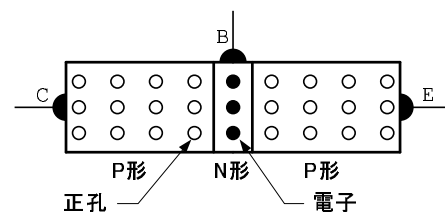


図 4.11: トランジスタのキャリアー

に負、エミッタ E に正の電圧を加える。これは順方向の電圧であるから、エミッタ E の正孔はベースに向かって流れ込む。ところが、ベースの幅は極めて薄い(数十ミクロン)から、大部分の正孔はベース領域を通り抜けてコレクタ側の P 形との境界面まで到達するようになる。そしてここまで来ると、正孔はコレクタ C に加わっている負の電圧のため吸引されてコレクタ側に急に吸い込まれる。このとき(正孔がベース領域を通過する際)、その一部はごくわずかではあるがベース電流 I_B となる。しかし、大部分のエミッタに流れ込んだ正孔、エミッタ電流 I_e の 95~99% がコレクタ電流 I_c になる。したがって、 I_E, I_B, I_C の間には次のような関係がある。

$$I_E = I_B + I_C \quad (4.1)$$

以上のような P 形と N 形の半導体を接合したものをバイポーラトランジスタ (Bipolar transistor) と言う。これは電子と正孔の 2 つがキャリアーとなって、電流を流すため、そのように呼ばれる²。

トランジスタには PNP 接合以外に NPN 接合のものもあるが、電源の極性を逆にすれば同様の働きをする。

4.2.2.5 トランジスタの接続法

図 4.13 のようにエミッター E の所で共通になっている接続をエミッター接地 (grounded-emitter type) という。これに対して図 4.14 のようにベース B の所で共通になっている接続をベース接地 (grounded-base type)、図 4.15 のようにコレクタ C の所で共通になっている接続をコレクタ接地 (grounded-collector type) と言い、この三つの接続方法が考えられる。すなわち、トランジスタの基本回路にはこのような 3 種類の接続方式がある。

本実験では、これら 3 種類のうちエミッタ接地回路について、その静特性を測定する。

²キャリアーが 1 種類のトランジスタもある。電界効果トランジスタ FET(Field Effect Transistor) で、ユニポーラトランジスタと呼ばれる

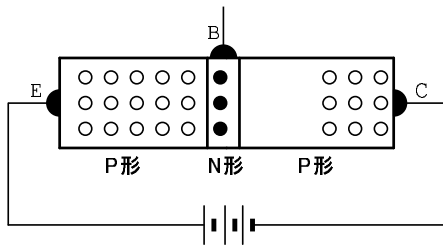


図 4.12: エミッターとコレクター間に電圧

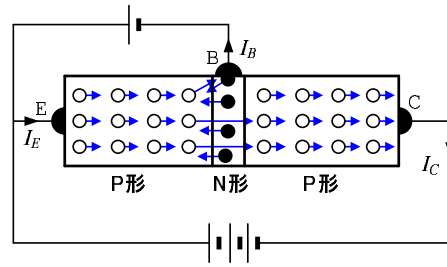


図 4.13: エミッター接地回路

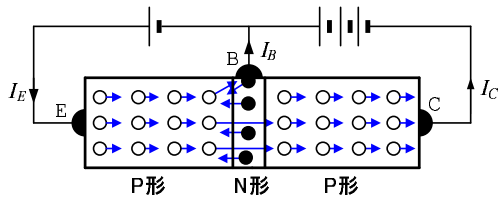


図 4.14: ベース接地

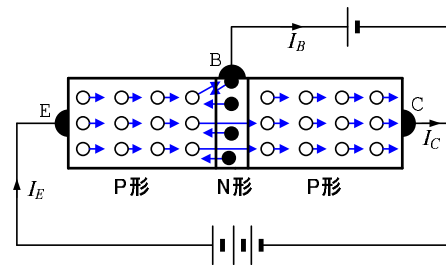


図 4.15: コレクター接地

4.3 実験方法

4.3.1 測定回路および注意事項

図 4.16 に示す回路で、トランジスタの静特性を測定する。測定に使用する機器を表 4.1 に示す。また、測定中は以下に注意すること。

- 測定するトランジスタの最大定格は、以下の通りである。この値を超えると破損することがある。
 - ベース電圧 $V_B = -12$ [V]
 - コレクター電圧 $V_C = -20$ [V]
 - コレクター電流 $I_C = -150$ [mA]
 - コレクター損失 $P_C = 150$ [mW]
- $V_C \times I_C$ は絶対に P_C を越えないこと。特性曲線を描く前にコレクター損失曲線を描いておくことよい。
- 測定中にトランジスタの温度が上昇して測定値が変動することがあるから、手早く測定すること。

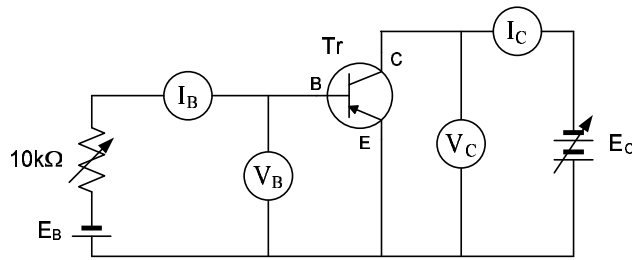


図 4.16: トランジスタの静特性測定回路

表 4.1: 実験に使う機器

記号	装置	型番	台数	備考
	トランジスタ実験回路		1	
Tr	NPN 型トランジスタ	2SB439	1	
V_B	直流電圧計		1	ベース電圧測定用
V_C	直流電圧計		1	コレクタ電圧測定用
I_B	直流電流計		1	ベース電流測定用
I_C	直流電流計		1	コレクタ電流測定用
E_B	直流電源		1	
E_C	直流電源		1	

4.3.2 V_C - I_C 特性および V_C - V_B 特性測定

1. 直流 E_C を調整し、 V_C の読みを 0 にする。
2. 抵抗を調整し、 I_B の読みを -0.05 [mA] 一定にして、 V_C を 0 から 0.1 [V] ずつ上昇させながら 1 [V] まで変化させ、そのときの I_C の読みを記録する。
3. V_C が 1 [V] を超えたならば、今度は 0.5 [V] ずつ上昇させながら、そのときの I_C の読みを記録する。ただし、 $V_C \times I_C$ の値、すなわちコレクタ消費電力 P_C が 150 [mW] に達したら、 V_C の上昇を止める。記録方法は、表 4.2 を参考のこと。
4. $I_b = -0.10, -0.15, -0.20, -0.25$ [mA] 一定として、前と同様の実験を繰り返す。

表 4.2: V_C - I_C 特性および V_C - V_B 特性

V_C [V]	$I_B=-0.05$ [mA]		$I_B=-0.10$ [mA]		$I_B=-0.15$ [mA]		$I_B=-0.20$ [mA]		$I_B=-0.25$ [mA]	
	V_B [V]	I_C [mA]	V_B [V]	I_C [mA]	V_B [V]	I_C [mA]	V_B [V]	I_C [mA]	V_B [V]	I_C [mA]
0.0										
0.1										
0.2										
0.3										
0.4										

4.3.3 I_B - V_B 特性および I_B - I_C 特性測定

1. 抵抗を調節し、 I_B の読みを 0 にする。
2. 直流電源 E_C を調節し、 V_C の読みを -1 [V] 一定にして、 I_B を 0 から 0.05 [mA] ずつ上昇させながら 0.50 [mA] まで変化させ、そのときの V_B と I_C の読みを記録する。記録方法は、表 4.3 を参考のこと。

表 4.3: I_B - V_B 特性および I_B - I_C 特性

V_C [V]	I_B [mA]	V_B [V]	I_C [μ A]
	0.00		
	0.05		
	0.10		
	0.05		

4.4 結果

表 4.2 と 4.3 の測定データより、図 4.17 のような静特性曲線を描く。なお、この図は実験で使用するトランジスタの静特性とは異なるので、あくまでも参考に留めておくこと。

図において、例えば V_C と V_B をそれぞれ 5 [V](A 点)、 0.42 [V](B 点) と定めた場合、A, B よりそれぞれ上下、左右に直線を引き、 V_C - V_B 特性の a 点が交点となる。また、線分 Ba を逆に延長し、 V_B - I_B 特性のうち A 点に選んだ $V_C=-5$ [V] をパラメーターとする曲線との交点 b を定める。この b 点で垂線を立てると、 I_B - I_C 特性の $V_C=-5$ [V] をパラメーターとする曲線との交点 c が求められる。また、c 点を通る水平線は最初に描いた線分 Aa と交点 d で交わる。この d 点は前に線分 bc を描いたときに I_B 軸と垂直に交わった点 D($I_B=-20$ [mA]) をパラメーターとした V_C - I_C 特性曲線上にある。すなわち、a, b, c, d 点が $V_C=-5$ [V], $V_B=-0.42$ [V] における特性点ということになる。

測定した特性曲線より、 $V_C=-1$ [V], $V_B=-0.42$ [V] における特性点を求めよ。また、得られた I_B - I_C 特性より、電流増幅率 $\beta = \Delta I_C / \Delta I_B$ を求めよ。ただし、 ΔI_C , ΔI_B は、それぞれ I_C , I_B の変化分である。

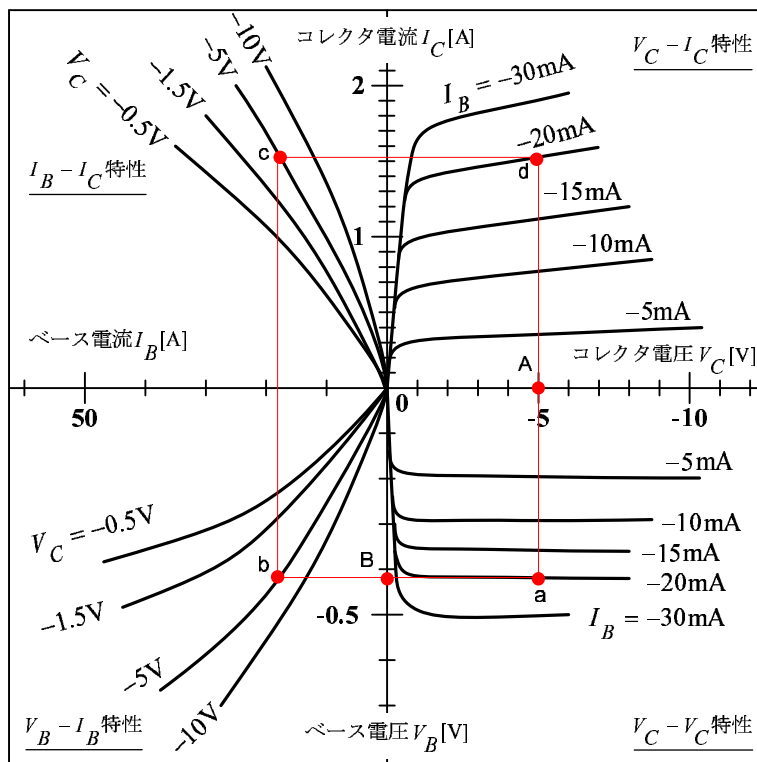


図 4.17: トランジスタの静特性グラフ

4.5 考察課題

1. 注意事項に示した P_c を越えないことを説明せよ。
2. 音声信号を増幅するトランジスタを用いた簡単な回路を設計せよ。

第5章 基本論理回路

5.1 目的

組み合わせ回路の基礎的動作を確認し、理解を深める。

5.2 原理

5.2.1 ブール代数の公理

組み合わせ回路はブール代数で、表現することができる。それは、数学の理論で公理が決められており、それを基礎として成り立っている。ブール代数は、

- 2項演算子 $+$, \cdot と単項演算子 $\bar{}$ が定義されてる。それぞれ加法と乗法、および補元の演算子を示す。
- 使われる変数は、0 と 1 のみである。

の特徴をもっている。0 と 1 だけからなる代数系であり、これはコンピューター内部で取り扱うデータのビットと同じである。さらに、演算子もコンピューター内部の回路と一致している。そのようなことから、コンピューターに代表される論理回路の記述にブール代数がよく使われる。

ブール代数の演算は、以下の公理で定義されている。

公理 5.2.1 (ブール代数)

$$\text{交換法則 } A + B = B + A, \quad A \cdot B = B \cdot A \quad (5.1)$$

$$\text{分配法則 } A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C), \quad A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C) \quad (5.2)$$

$$\text{単位元 } A + 0 = A, \quad A \cdot 1 = A \quad (5.3)$$

$$\text{補元 } A + \bar{A} = 1, \quad A \cdot \bar{A} = 0 \quad (5.4)$$

通常の数の演算と似ているが、異なる部分もある。それは、

- 式 (5.2) の 2 つある分配法則のうちの一つが、数の計算の分配法則に無い。
- 補元は逆元に似ていますが、異なる。

である。また、加法と乗法、補元の演算の結果は、必ず元の変数の集合 $\{0, 1\}$ に含まれる。このことをこれらの演算について閉じている¹と言う。

この公理から直ちに分かる重要な性質がある。それは、加法の $+$ と乗法の \cdot 、0 と 1 をそれぞれ入れ替えても、同じ公理になる。このことから双対の原理

定理 5.2.1 (双対の原理) ブール代数では、元の式の $+$ と \cdot 、0 と 1 を交換してできる式を元の式の「双対」(dual) と呼ぶ。これは、ある定理が成り立つならば、その定理の双対もまた成立する。

¹5.2.3 節を見よ。

が成り立つ。

ブール代数においては加法と乗法は対等である。しかし、普通には、数の演算同様に乗法は加法に先立って計算されるので注意が必要である。さらに、括弧を用いて、演算順序の変更も可能としている。要するに、計算順序は普通の数の演算と同じと考えてよい。そのため乗法の記号 \cdot が省略されたり、加法よりも乗法を演算順序を優先することを暗黙の了解事項として書かれている場合が多い。このようなことは可能で問題は無いが、双対の原理を考慮すると、加法と乗法の演算順序は対等とし、括弧で演算順序を決めて、さらに乗法の記号もちゃんと書いた方が良いであろう。

5.2.2 ブール代数の諸定理

ブール代数の公理から導かれる重要な諸定理を示す。

定理 5.2.2 (演算の諸定理)

$$\text{結合則} \quad A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad (5.5)$$

$$\text{吸収則} \quad A + (A \cdot B) = A, \quad A \cdot (A + B) = A \quad (5.6)$$

$$\text{巾等律} \quad A + A = A, \quad A \cdot A = A \quad (5.7)$$

$$A + 1 = 1, \quad A \cdot 0 = 0 \quad (5.8)$$

$$A + (\bar{A} + B) = 1, \quad A \cdot (\bar{A} \cdot B) = 0 \quad (5.9)$$

$$(A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B) = (A \cdot B) + (\bar{A} \cdot \bar{B}), \quad (A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B) = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B}) \quad (5.10)$$

$$\text{ド・モルガン} \quad \overline{(A + B)} = \bar{A} \cdot \bar{B}, \quad \overline{(A \cdot B)} = \bar{A} + \bar{B} \quad (5.11)$$

定理 5.2.3 (二重否定)

$$\bar{\bar{A}} = A \quad (5.12)$$

定理 5.2.4 $A + \bar{B} = 1$ かつ $A \cdot \bar{B} = 0$ ならば、 $A = B$ である。

これらは、全て公理を用いて証明可能である。すなわち、公理からこれらの定理を導くことができる。

5.2.3 真理値表と MIL 記号

ブール代数の変数の集合は $0, 1$ 、演算子は $+$ と \cdot 、 $\bar{\quad}$ である。変数も演算子も少ないので、すべての組み合わせを表にすることは簡単である。それを表 5.1 から 5.3 に示す。このように、変数の全ての組み合わせを示して、その演算結果を示すものを真理値表と言う。これら基本演算子の動作をする回路記号 (MIL 記号) も図 5.1 ~ 5.3 に示す。

これら基本演算に加えて、よく使われる論理回路の素子を図 5.4 ~ 5.7 に、その真理値表を表 5.4 ~ 5.7 に示す。



図 5.1: OR 素子

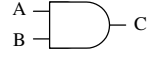


図 5.2: AND 素子

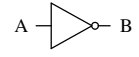


図 5.3: NOT 素子

表 5.1: OR の真理値表

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表 5.2: AND の真理値表

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 5.3: NOT の真理値表

A	\bar{A}
0	1
1	0

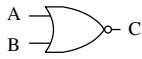


図 5.4: NOR 素子

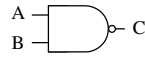


図 5.5: NAND 素子

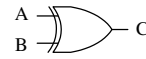


図 5.6: XOR 素子



図 5.7: 一致素子

表 5.4: NOR の真理値表

A	B	$\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

表 5.5: NAND の真理値表

A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 5.6: XOR の真理値表

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 5.7: 一致の真理値表

A	B	$A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5.3 実験方法

5.3.1 基本動作実験

論理積 (AND), 論理和 (OR), 否定 (NOT), 否定論理積 (NAND), 否定論理和 (NOR), 排他的論理和 (XOR), 一致論理の真理値表を作成し、その動作を確かめる。

5.3.1.1 論理積 (AND) 回路の実習

1. チップ付きコードを使用し図 5.8 の回路を作成する。図中の L は、動作表示ランプ (ビットモニター) である。
2. 電源を投入する。
3. 表 5.8 の真理値表に従って、回路の動作を確認する。
4. 同様の実験を図 5.9 の回路でも実施する。

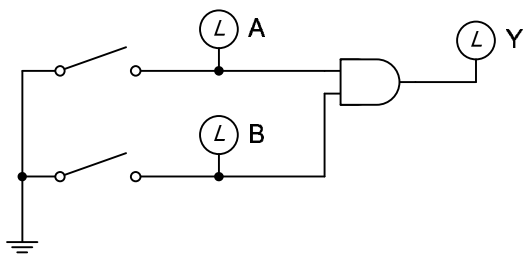


図 5.8: 2 入力 AND の実験回路

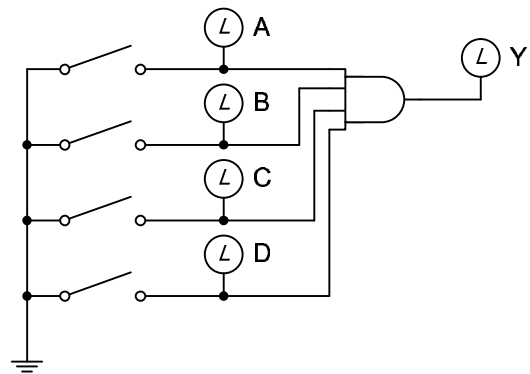


図 5.9: 4 入力 AND の実験回路

表 5.8: 2 入力論理積 (AND) の真理値表と実験結果。() 内にはし表したスイッチレジスター、およびビットレジスターの番号を記入する。

入力		出力	動作表示ランプの点滅		
A	B	Y	LA	LB	LY
()	()	()	()	()	()
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

5.3.1.2 論理和 (OR) 回路の実習

1. チップ付きコードを使用し図 5.10 の回路を作成する。
2. 電源を投入する。
3. 表 5.9 の真理値表に従って、回路の動作を確認する。
4. 同様の実験を図 5.11 の回路でも実施する。

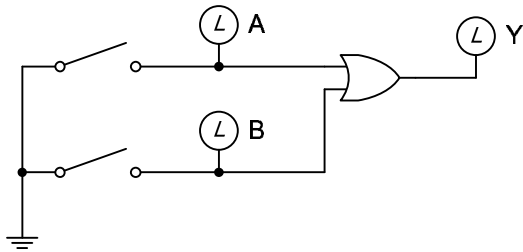


図 5.10: 2 入力 OR の実験回路

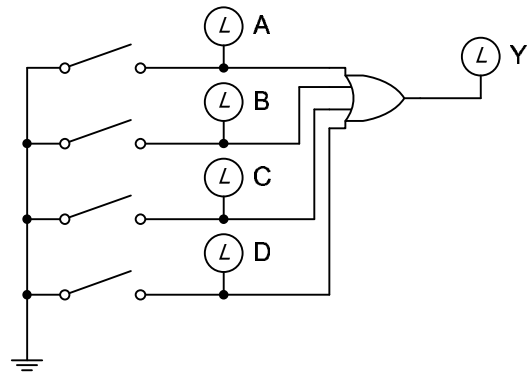


図 5.11: 4 入力 OR の実験回路

表 5.9: 2 入力論理和 (OR) の真理値表と実験結果

入力		出力	動作表示ランプの点滅		
A	B	Y	LA	LB	LY
()	()	()	()	()	()
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

5.3.1.3 否定 (NOT) 回路の実習

1. チップ付きコードを使用し図 5.12 の回路を作成する。
2. 電源を投入する。
3. 表 5.10 の真理値表に従って、回路の動作を確認する。

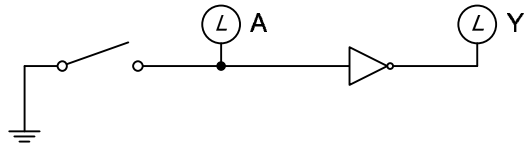


図 5.12: NOT の実験回路

表 5.10: 否定 (NOT) の真理値表と実験結果

入力	出力	動作表示ランプの点滅	
		LA	LY
A	Y	LA	LY
()	()	()	()
0			
1			

5.3.1.4 否定論理積 (NAND) 回路の実習

1. チップ付きコードを使用し図 5.13 の回路を作成する。
2. 電源を投入する。
3. 表 5.11 の真理値表に従って、回路の動作を確認する。

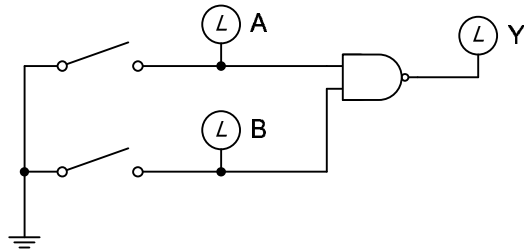


図 5.13: NAND の実験回路

表 5.11: 否定論理積 (NAND) の真理値表と実験結果

入力		出力	動作表示ランプの点滅		
A	B	Y	LA	LB	LY
()	()	()	()	()	()
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

5.3.1.5 否定論理和 (NOR) 回路の実習

1. チップ付きコードを使用し図 5.14 の回路を作成する。
2. 電源を投入する。
3. 表 5.12 の真理値表に従って、回路の動作を確認する。

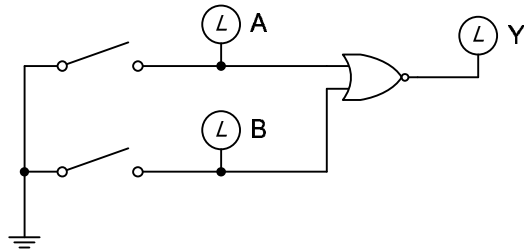


図 5.14: NOR の実験回路

表 5.12: 否定論理和 (NOR) の真理値表と実験結果

入力		出力	動作表示ランプの点滅		
A	B	Y	LA	LB	LY
()	()	()	()	()	()
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

5.3.1.6 排他的論理和 (XOR) 回路の実習

1. チップ付きコードを使用し図 5.15 の回路を作成する。
2. 電源を投入する。
3. 表 5.13 の真理値表に従って、回路の動作を確認する。

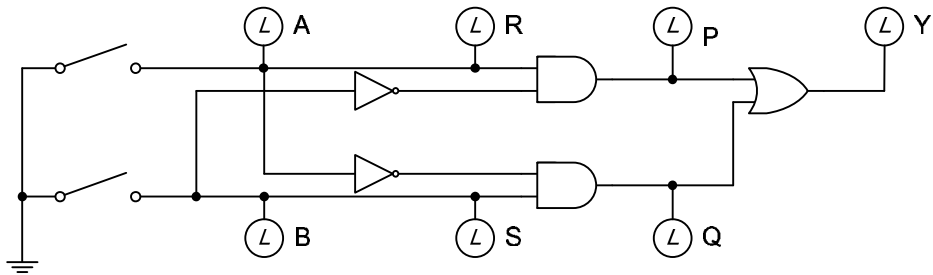


図 5.15: 排他的論理和 (XOR) の実験回路

表 5.13: 排他的論理和 (XOR) の真理値表と実験結果

入力		出力	動作表示ランプの点滅						
A	B	Y	LA	LB	LS	LR	LP	LQ	LY
()	()	()	()	()	()	()	()	()	()
0	0								
0	1								
1	0								
1	1								

5.3.1.7 一致回路の実習

1. チップ付きコードを使用し図 5.16 の回路を作成する。
2. 電源を投入する。
3. 表 5.14 の真理値表に従って、回路の動作を確認する。

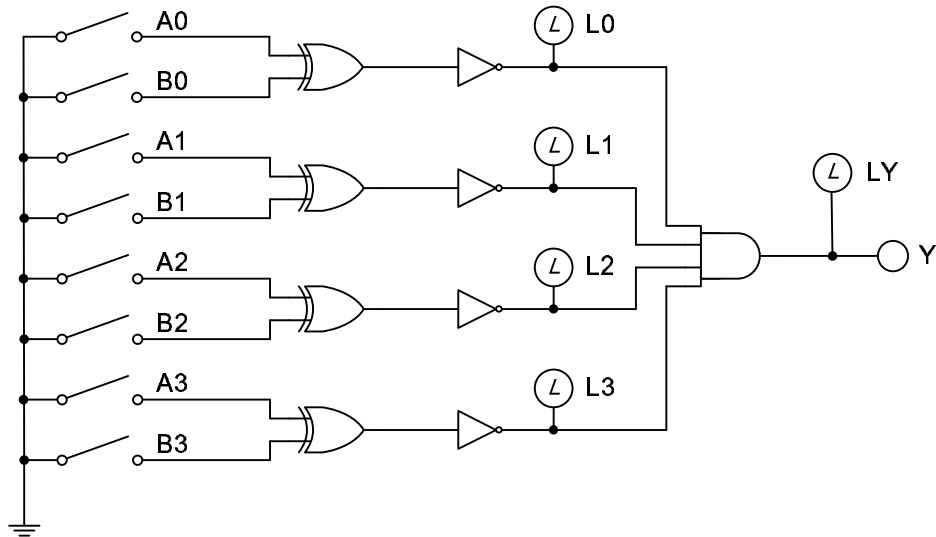


図 5.16: 一致の実験回路

表 5.14: 一致の真理値表と実験結果

入力								出力	動作表示ランプの点滅				
A0	A1	A2	A3	B0	B1	B2	B3	Y	L0	L1	L2	L3	LY
()	()	()	()	()	()	()	()	()	()	()	()	()	()
0	0	0	0	0	0	0	0						
1	1	1	1	0	0	0	0						
0	0	0	0	1	1	1	1						

5.3.2 論理式実験

次式が示す回路を AND, OR, NOT, NAND, NOR の各素子を用いて作成し、真理値表の結果と比較せよ。さらに、式を簡単化し同様に確かめよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad & Y = A \cdot \bar{B} + A \cdot C \\ & Y = (A + B) \cdot (A + C) \\ (2) \quad & Y = A \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot C \\ & Y = (A + B) \cdot (\bar{A} + B) \\ (3) \quad & Y = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B \\ & Y = \bar{A} \cdot (\bar{B} + B) + A \cdot B \\ (4) \quad & Y = \bar{A} + \bar{B} \cdot C + \bar{C} \\ & Y = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C \\ (5) \quad & Y = (A \cdot B + C) \cdot A \\ & Y = (\overline{A \cdot \bar{C}}) \cdot (B + \bar{C}) \cdot \bar{B} \end{aligned}$$

5.3.3 応用実験

3人の投票とする。多数決で成立のとき”1”、そうでないとき”0”となる出力を持つ回路を作成し、確かめよ。

5.4 考察課題

1. AND 回路に比べて NAND 回路が有利、あるいは OR 回路に比べて NOR 回路が有利な点を説明せよ。

2. 練習問題

- 図の論理回路の論理式を書け。

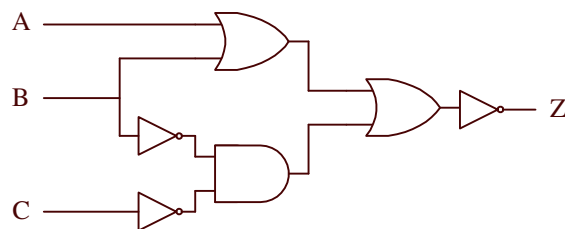


図 5.17: 回路

- ブール代数の公理や定理を用いて、論理式を簡単せよ。
- 簡略化された論理式を MIL 記号で表現せよ。
- 真理値表を作成せよ。

付録 A 微分方程式

A.1 一階線型常微分方程式

回路の動作を表す 1 階の微分方程式は、

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (\text{A.1})$$

のような一階線型同次常微分方程式がしばしば現れる。 $Q(x) = 0$ の場合を同次、 $Q(x) \neq 0$ の場合を非同次と言う。

非同次の場合は変数分離形なので、それは簡単に一般解が求められる。この場合、一般解は

$$y = c_1 e^{-\int P(x)dx} \quad (\text{A.2})$$

である。ここで、 c_1 は任意定数である。

非同次の場合は少し難しくなり、いろいろな方法がある(たとえば、[1]に見よ)。ここでは、式(A.1)の両辺に適当な関数 $\varphi(x)$ を乗じて、変数分離形にする。そうすると、左辺は $y'\varphi + P\varphi y$ となる。この左辺が $(y\varphi)'$ となれば、変数分離形となり容易に計算できる。このように変数分離形になるためには、

$$\varphi' = P\varphi \quad (\text{A.3})$$

であればよい。これはちょうど変数分離形になっており、

$$\varphi(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (\text{A.4})$$

である。この関数を元の微分方程式の両辺に乗じることになるので、積分定数は省いている。

変数分離形にするために、式(A.4)を式(A.1)の両辺に乗じると

$$y'\varphi(x) + \varphi(x)P(x)y = Q(x)\varphi(x) \quad (\text{A.5})$$

となる。先に示したように $\varphi(x)P(x) = \varphi'(x)$ なので、

$$[y\varphi(x)]' = Q(x)\varphi(x) \quad (\text{A.6})$$

である。これもまた、変数分離形なので、積分は簡単である。積分の後、整理すると、

$$y = \frac{1}{\varphi(x)} \left[\int Q(x)\varphi(x)dx + c_1 \right] \quad (\text{A.7})$$

となる。したがって、元の微分方程式(A.1)の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c_1 \right] \quad (\text{A.8})$$

である。

A.2 二階線型常微分方程式

コイルとコンデンサーの両方が含まれる回路を表す微分方程式は、二階線型常微分方程式になることが多い。「LCRの過渡応答」の実験では、

$$y'' + \kappa y' + \lambda y = \mu \quad (\text{A.9})$$

の形の微分方程式が現れる。ここで、 κ, λ, μ は定数である。この微分方程式の解き方を示す。

式 (A.9) のように同次項がある時 (非同次と言う)、その一般解は、

$$(\text{一つの特解}) + (\text{同次方程式の一般解})$$

の形で表すことができる。2階の非同次微分方程式を解く場合、これらの2つの階を求め、その和を一般解とするのは定石である。

式 (A.9) の特解 y_1 は、簡単に分かる。それは、

$$y_1 = \frac{\mu}{\lambda} \quad (\text{A.10})$$

となる。これを元の式に代入すれば、その解になっていることは直ちに分かる。

残る問題は、同次方程式

$$y'' + \kappa y' + \lambda y = 0 \quad (\text{A.11})$$

の一般解を探すことである。科学技術の分野では、このタイプの方程式では、

$$y = e^{i\omega x} \quad (\text{A.12})$$

を解と仮定する。そして、これが解となるように ω を決める。これを元の同次微分方程式に代入して整理すると、

$$\omega^2 - i\kappa\omega - \lambda = 0 \quad (\text{A.13})$$

となる。すると、2次方程式の解の公式より、 ω は

$$\omega = \frac{\kappa i \pm \sqrt{4\lambda - \kappa^2}}{2} \quad (\text{A.14})$$

とならなければならない。これら、2つの ω とともに、式 (A.11) の解となる。また、この微分方程式は線型なので、重ね合わせの原理が成り立つため、2つの解の線型和も解となりうる。従って、同次微分方程式 (A.11) の一般解 y_2 は、

$$y_2 = c_1 \exp\left(\frac{-\kappa + i\sqrt{4\lambda - \kappa^2}}{2}x\right) + c_2 \exp\left(\frac{-\kappa - i\sqrt{4\lambda - \kappa^2}}{2}x\right) \quad (\text{A.15})$$

となる。これは、2階の微分方程式で2個の定数があり一般解にふさわしい。

ところが、式 (A.13) が重根、すなわち、 $4\lambda - \kappa^2 = 0$ の場合、事情が異なる。式 (A.15) の未知数が一つなくなり、一般解とならない。この場合、一般解 y_2 は

$$y_2 = (c_1 + c_2 x) \exp\left(-\frac{\kappa}{2}x\right) \quad (\text{A.16})$$

となる。元の式 (A.11) に代入して確かめよ。

以上をまとめると、微分方程式 (A.9) の一般解は、

$$y = \begin{cases} \frac{\mu}{\lambda} + c_1 \exp\left(\frac{-\kappa + i\sqrt{4\lambda - \kappa^2}}{2}x\right) + c_2 \exp\left(\frac{-\kappa - i\sqrt{4\lambda - \kappa^2}}{2}x\right) & 4\lambda - \kappa^2 \neq 0 \text{ のとき} \\ \frac{\mu}{\lambda} + (c_1 + c_2 x) \exp\left(-\frac{\kappa}{2}x\right) & 4\lambda - \kappa^2 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

となる。これは、 $4\lambda - \kappa^2$ の値が正や負、0により、曲線の形がかなり異なるので注意が必要である。

関連図書

[1] 一松信. 解析学序説 上巻. 裳華房, 1978.