電気磁気学特論　試験解答

2004 年 9 月 17 日

1　問題

1.1　静電場

点電荷 Q のまわりの電場の電位 ϕ は、点電荷のある場所を除いてラプラス方程式を満たすことを示せ。

[**解答**]

クーロンの法則より、問題の点電荷 Q を原点として、そこから位置 $\boldsymbol{r}$ に試験電荷 q が受ける力は、

$$\boldsymbol{F} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1}$$

である。電場の定義、$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$ により、そこの電場は

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2}$$

となる。次に電場のスカラーポテンシャルの定義、$\boldsymbol{E} = -\nabla\psi$ を用いると、

$$\psi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + C \tag{3}$$

となる。C は任意定数である。無限遠点 (∞) をポテンシャルの基準とすると、r' のポテンシャルは

$$\begin{aligned} \psi(r') &= \int_{\infty}^{r'} \nabla\psi \cdot d\boldsymbol{r} \quad &(4)\\ &= psi(r') - \psi(\infty) \quad &(5)\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon r'} \quad &(6) \end{aligned}$$

となる。プライムの記号はじゃまなので、それを取ると、電荷 Q から r 離れた位置での電場のスカラーポテンシャルは、

$$\psi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \tag{7}$$

である。極座標系で書いたポテンシャル (電位) は

$$\psi(r,\,\theta,\,\phi) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{8}$$

となり、r のみの関数である。また、極座標系のラプラス演算子は、

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \tag{9}$$

である。この式に、点電荷のポテンシャルを表す式 (8) を代入して計算すればよい。この場合ポテンシャルは、r のみの関数なので、ラプラス演算の右辺の第 2 と 3 項は、ゼロになる。従って

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r^2}{r^2}\right) \\ &= 0 \qquad\qquad (r\neq 0)\end{aligned} \tag{10}$$

となる。これで、ラプラス方程式を満たすことがわかる。

1.2 静磁場

次の二つのベクトルポテンシャルは、同一の磁場を表している。その磁場の磁束密度を求めよ。次に、一つの磁場を表すのに、このような複数のベクトルポテンシャルがあってもよい理由を述べよ。

$$\boldsymbol{A} = (0,\,Bx,\,0) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{A} = \left(-\frac{By}{2},\,\frac{Bx}{2},\,0\right) \tag{12}$$

[**解答**]

まず、それぞれのベクトルポテンシャルが表す磁場を考えてみる。ベクトルポテンシャルと磁場の関係は、$\boldsymbol{B} = \nabla\times A$ なので、式 (11) の表す磁場は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \nabla\times(0,\,Bx,\,0) \\ &= (0,\,0,\,B)\end{aligned} \tag{13}$$

となる。同様に、式 (12) の表す磁場は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \nabla\times\left(-\frac{By}{2},\,\frac{Bx}{2},\,0\right) \\ &= (0,\,0,\,B)\end{aligned} \tag{14}$$

となる。これら 2 つのベクトルポテンシャルは、同じ磁場 $(0,\,0,\,B)$ を表している。

なぜ、ベクトルポテンシャルは異なっているのに、同じ磁場となるのか?。これは、ベクトル恒等式

$$\nabla \times A = \nabla \times (\boldsymbol{A} + \nabla\phi) \tag{15}$$

から説明できる。即ち、異なるベクトルポテンシャル、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\phi$、であっても、同じ磁場を表すことができるのである。これは、ちょうど、通常の関数に定数項を加えても、その微分は同じであることに対応する。

それでは、$\boldsymbol{A} = (0,\, Bx,\, 0)$、$\boldsymbol{A}' = (-By/2,\, Bx/2,\, 0)$ として、その関係を調べてみる。それぞれの差は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A} &= \left(-\frac{By}{2},\, -\frac{Bx}{2},\, 0\right) \\ &= \nabla\left(-\frac{Bxy}{2}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

である。したがって、$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\left(-Bxy/2\right)$ となっており、ベクトル恒等式より同じ磁場を表すことになる。

1.3 時間変化する電磁場

日本では地磁気の磁束密度の水平成分は、約 0.3[T] である。水平に東西方向に置いた長さ 1m の導体棒を、鉛直方向に 1[m/sec] の速さで動かすとき、この導体棒の両端に電磁誘導によって生じる電位差を求めよ。

1.4 電磁気学の全て

1.4.1 マックウェルの方程式

物質中のマックスウェルの方程式を書き出せ。

1.5 ローレンツ力

電荷量 q の荷電粒子が、電磁場中を運動するときに受ける力 $\boldsymbol{F}$ を示せ。