真空中の静電場(その1)

山本昌志*

2004年6月4日

1 ガウスの法則と電位

1.1 クーロンの法則

場のベクトル量である電場 $\boldsymbol{E}$ は、その場所に置いた試験電荷が受ける力から決められる。すなわち、

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{1}$$

である。ここで、$\boldsymbol{F}$ は力、q は試験電荷の電荷量である。ただ単にこういう風に、電場は定義されるということだけである。電荷 Q が r_0 の位置にあり、その電荷により、$\boldsymbol{r}$ の位置にある試験電荷が受ける力は、クーロンの法則

$$\boldsymbol{F} = \frac{Qq(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0})}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}|^3} \tag{2}$$

から分かっている。これは、ベクトルを使った式ではあるが、諸君が2年生(?) のときに学習したクーロンの法則

$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{3}$$

とほとんど同じであることを理解して欲しい。このときは、スカラーの式なので、方向を云々と言うような文言がこの式とともに現れたと思う。式(2)のようにベクトルの式に表すと、余計な文言が不要なので便利である。ここで、

- 式(1)は定義で、何も物理的なことは語っていない。したがって、この式が成り立っているか否か、あるいは精度の議論は無意味である。
- 式(2)は、実験から導かれた式である。この式が、いつも完全に成り立っているかは不明である。ただ、我々は、この式は非常に良い精度で成り立っていることを知っているだけである。

であることに注意が必要である。

実を言うと、本日の学習範囲である真空中の静電場は、この2つの式で全てである。過不足なく、この2つの式でおしまいであるが、もう少し便利に計算できるようにしておく。

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

これからは、静電場の話をするわけで、力の話はしばらくお目にかからない。したがって、クーロンの法則は、

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0})}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}|^3} \tag{4}$$

と書き換える。物理的な内容は、何も変わっていない。

1.2 発散

話を簡単にするために、座標の原点に 1 個の電荷 Q を置いたとする。これから、電荷と位置 $\boldsymbol{r}$ での電場の関係を求める。この場合、空間は等方で特別な方向が無い為、

- 電場の方向は、$\boldsymbol{r}$ の方向、あるいはその反対である。
- 原点からの距離が同じであれば、方向に関わらず、電場の大きさ $|\boldsymbol{E}|$ は同じである。

と言うことがわかる。したがって、原点から r 離れた球を考え場合、その表面の電場 E_r は、

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{5}$$

となる。これを、球の表面で面積分すると

$$\int_{S(\text{球})} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon} \tag{6}$$

となる。球状の表面の電場を積分したものは、その中に含まれる電荷 Q を誘電率 ε で割ったものになる。これは、球の大きさに関係なく成り立つ式である。これは、電場の大きさが逆 2 乗の法則に従うから言えるのである。この式も、クーロンの法則を書き換えただけである。

ガウスの定理より、式 (6) の左辺は、

$$\begin{aligned} \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV \\ &= \int_{V_0} \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV + \int_{V_1} \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV \end{aligned} \tag{7}$$

のように、変化させることができる。ここで、領域 $V_0 + V_1$ が元の球を表す。そうして、V_0 が原点、すなわち、電荷を含む領域とする。一方、V_1 は電荷を含まない領域である。ベクトル解析の恒等式

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = 0 \tag{8}$$

より、V_1 での積分の値はゼロである。V_0 の場合、原点以外はゼロであるが、特異点があるため、その積分はゼロにならない。領域の分割の仕方は任意で、いくつ物領域に分けても、同じことが言えるので、

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon} \tag{9}$$

と書くことができる。今度は、式 (6) の球の場合とは異なり、任意の形状で成り立っている。

このことは、非常にありがたく、わざわざ電荷が原点になくても良いことになる。積分する領域の内部にあれば、式 (9) が成り立つわけである。次に電荷が 2 個ある場合について考えよう。まずはじめに、$\boldsymbol{r}_1$ の位置に電荷 Q_1 を置いた場合、

$$\int_S \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{Q_1}{\varepsilon} \tag{10}$$

が成り立つ。次に、この Q_1 を取り去って、$\boldsymbol{r}_2$ の位置に電荷 Q_2 がある場合を考える。式 (10) と同じ積分範囲で、

$$\int_S \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{Q_2}{\varepsilon} \tag{11}$$

が成り立つことが分かる。この 2 つの電荷が同時に存在した場合の電場 $\boldsymbol{E}$ は、そのベクトル和なので

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \tag{12}$$

となる。これを、各々が独立に存在した領域での表面積分を行うと

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \int_S (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) \cdot \boldsymbol{n} dS \\ &= \int_S \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{n} dS + \int_S \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{n} dS \\ &= \frac{Q_1}{\varepsilon} + \frac{Q_2}{\varepsilon} \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon}\end{aligned} \tag{13}$$

となることが分かる。これと同じことを続けると、

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{\sum_i Q_i}{\varepsilon} \qquad \text{ただし、} Q_i \text{ は S 内部} \tag{14}$$

ということが分かる。これは便利な式で、ある閉じた領域内にある電荷の総量は、その閉じた領域の表面での電場を面積分の値と等しいといっている。電荷の総量を知りたければ、表面での電場を積分すればよい。

この式はなにも、点電荷のみではなく、連続的に電荷が分布している場合も成り立つ。電荷密度 ρ、これは位置 $\boldsymbol{r}$ の関数のスカラー場、を考える。すると、式 (14) の右辺の和の部分は、積分に置着替えられる。すなわち、

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho dV \tag{15}$$

のとおりである。これをガウスの法則の積分形と言う。

次に積分の領域を小さくして、ガウスの法則の微分形を考える。まずは、式 (15) の左辺は、ガウスの定理より

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV \tag{16}$$

である。したがって、式 (15) は

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho dV \tag{17}$$

となる。でもって、積分領域 V をうーんと小さくすると、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon} \tag{18}$$

となる。これがガウスの法則の微分形である。これがマックスウェルの方程式の最初のものになる。なんのことはない、クーロンの法則を書き直しただけである。逆 2 乗の法則が成り立つと仮定しているから、式 (18) が成り立つのである。

最後に注意を一つ述べておく。式 (4) の発散 (divergence) をとり、体積積分してはならない。原点以外の発散はゼロであるが、原点は特異点であるため、そこは慎重に取り扱わなくてはならない。

1.3 回転

次に、電場の回転がどうなっているか考える。その前に、電場の線積分を考える。図 1 の場合の二つの積分経路 A と B の積分を考えると。電場の線積分の結果は、どちらも同じ値になる。それは、

$$\begin{aligned}\int_{p_1}^{P_2}\boldsymbol{E}\cdot d\ell&=\int_{r_1}^{r_2}\frac{Qdr}{4\pi\varepsilon r^2}\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

である。どのような経路をとっても、その電場の線積分はスタート点とゴール点で決まる。

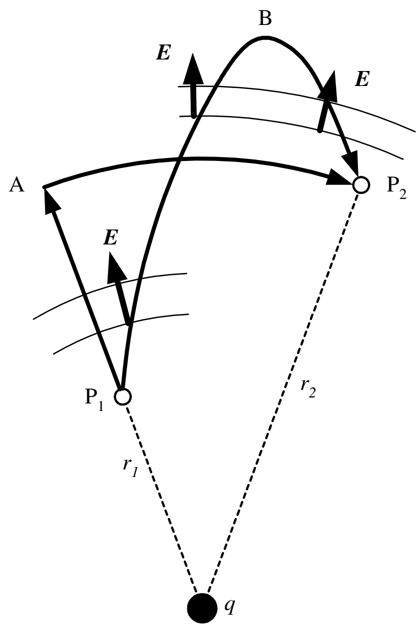

図 1: 道筋 A と B での電場の線積分の比較

1 つ電荷ではなくて、もっとたくさんの電荷がある場合、電場はそのベクトル和、$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+\cdots$

となる。したがって、電場の線積分は、それぞれの線積分

$$\int_{p_1}^{P_2} \boldsymbol{E} \cdot d\ell = \int_{p_1}^{P_2} (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots) \cdot d\ell \tag{20}$$

$$= \int_{p_1}^{P_2} \boldsymbol{E}_1 \cdot d\ell + \int_{p_1}^{P_2} \boldsymbol{E}_2 \cdot d\ell + \int_{p_1}^{P_2} \boldsymbol{E}_3 \cdot d\ell + \cdots \tag{21}$$

となる。各々の電荷のつくる電場の線積分は、道筋に依存しないのは先ほど述べたとおりである。したがって、多くの電荷がある場合、これは任意の静電場に相当、その線積分は道筋に依存しないと結論できる。

このことから、また別の結論も引き出せる。任意の閉曲線の沿った線積分

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\ell = 0 \tag{22}$$

となる。したがって、静電場の回転は

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= \lim_{S \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{E} \cdot d\ell}{S} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

となる。

以上より、静電場の発散を表す式 (18) と回転を示す式 (23) を示すことができた。先週述べたように、発散と回転が分かったので、これで静電場は決まる。

1.4 スカラーポテンシャルあるいは電圧

静電場では、その回転はゼロであるから、ベクトル解析によれば、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) \tag{24}$$

となる、スカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ があるはずである。これは、勾配の回転は常にゼロになることからきている。あるいは、式 (19) のように積分の経路に依存しないスカラー量 ϕ という量を決めることができる。

$$\phi(\boldsymbol{r}_2) - \phi(\boldsymbol{r}_1) = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{E} \cdot d\ell \tag{25}$$

このスカラー場 $\phi\boldsymbol{r}$ のことをポテンシャルと言う。ポテンシャルの定義式 (24) を積分したら得られる。聞きなれた言葉で言うと、電圧のことである。重力場での高さと同じ役割を果たす。

次に、位置の関数としてのポテンシャルを決めたい。一般にポテンシャルの値に、任意の定数を足し合わせても、その電場の大きさは変わらない。定数は微分 (勾配) すると、ゼロになるからである。ポテンシャルで重要な意味を持つものは、その差である。どこかに基準を置いて、そこからの差でポテンシャルの大きさを定義する。ようするに、山の高さは海面を基準にするのと同じである。あるいは、電気回路において、どこかにアース電位 (0V) を決めるのと同じである。基準を変えても、物理法則は何も変わらないことに注意が必要である。

通常、無限遠点をポテンシャルの基準とする。すると、

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= -\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{E}\cdot d\ell \\
&= -\int_{\mathrm{inf}}^{r} \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon r^2}dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}
\end{aligned} \tag{26}
$$

となる。これで、点電荷 Q が原点にあるときのポテンシャル $\phi(r)$ が決められた。$r\to\infty$ とするとそのポテンシャルはゼロとなる。要するに、無限遠点のポテンシャルがゼロになるように基準が決められたのである。

もっと一般的に書くと、ポテンシャルは

$$
\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q(\boldsymbol{r})}{4\pi\varepsilon|r-r_0|} \tag{27}
$$

となる。

2 電位のポアソン方程式とラプラス方程式

電場 $\boldsymbol{E}$ は、発散を表す式 (18) と回転を示す式 (23) の微分方程式を解けば計算できるが、大変である。一般にベクトルの方程式を計算するのは大変である。一方、スカラー場 ϕ を計算し、その勾配から電場を計算するのは比較的簡単である。

それでは、スカラー場が満たす方程式を考えよう。スカラー場の勾配が電場、$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$ となる。また、電場の発散が電荷密度、$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$ である。したがって、

$$
\nabla\cdot(-\nabla\phi) = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{28}
$$

となり、スカラーポテンシャルは

$$
\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon} \tag{29}
$$

となる。この式を「ポアソン方程式」と言う。また、領域に電荷がない場合、

$$
\nabla^2\phi = 0 \tag{30}
$$

となり、この式を「ラプラス方程式」と言う。静電場の場合、一般的にはポアソン方程式で、電荷が無い特別な場合「ラプラス方程式」となる。

ポアソン方程式 (29) は、スカラーの方程式なので解きやすい。解きやすいといっても、これを直接計算するのは、そんなに易しいことではない[1]。そこで、直感的にこの微分方程式の解を求めることにする。式 (26) から、

[1]興味のある者は、グリーンの定理をみよ