

ベクトル解析練習問題

山本昌志*

2004年5月21日

1 ベクトル解析の演習問題

1.1 ベクトルの演算

- (1) まずは、小手調べとして、次のベクトルの和 ($C = A + B$) と差 ($C = A - B$) を計算せよ。ただし、和と差は2通りの方法、

- 成分同士の和を計算する方法。
- 図形により、ベクトルをつなぐ方法。

で計算すること。そして、これらが等しいことを確認せよ。

$$(a) \quad A = (1, 2, 0) \quad B = (3, 1, 0)$$

$$(b) \quad A = (1, 1, 0) \quad B = (4, 1, 0)$$

- (2) $A + B$ と $A - B$ が与えられているとき、 A と B はどのようにすれば求められるか?
- (3) $A = (a_x, a_y, a_z)$ 、 $B = (b_x, b_y, b_z)$ の時、 $A \cdot B$ と $A \times B$ を示せ。
- (4) $A = (1, 2, 3)$ 、 $B = (4, 5, 6)$ のとき、内積 ($A \cdot B$) と外積 ($A \times B$) および ($B \times A$) を計算せよ。
- (5) $A = (1, 0, 0)$ 、 $B = (0, 1, 0)$ のとき、内積 ($A \cdot B$) と外積 ($A \times B$) および ($B \times A$) を計算せよ。
- (6) $A = (1, 0, 0)$ 、 $B = (1, 0, 0)$ のとき、内積 ($A \cdot B$) と外積 ($A \times B$) および ($B \times A$) を計算せよ。
- (7) 位置ベクトル r の各成分を示せ。

* 国立秋田工業高等専門学校 生産システム工学専攻

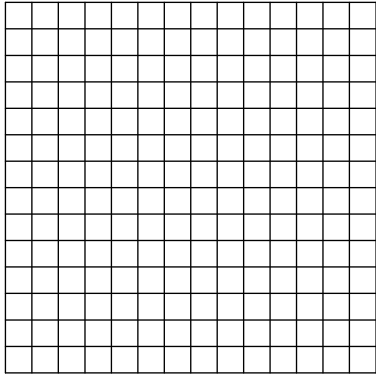


図 1: (1) の和

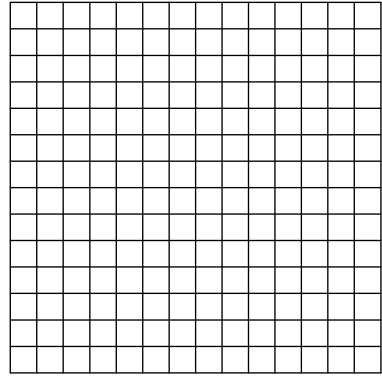


図 2: (1) の差

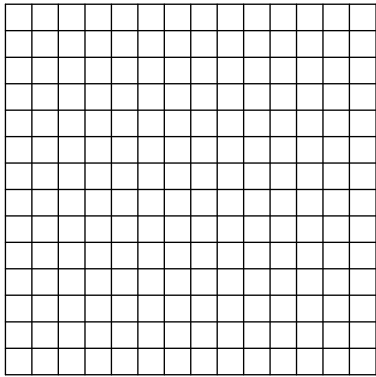


図 3: (2) の和

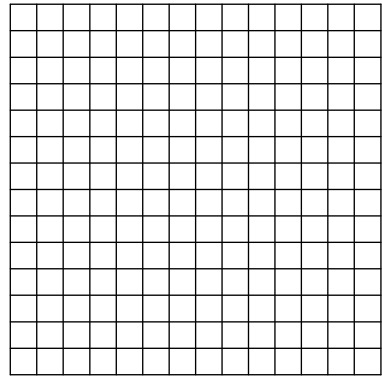


図 4: (2) の差

1.2 微分

- (1) スカラー場 $f(x, y, z)$ があるとき、その勾配 ∇f の各成分を示せ。
- (2) 位置ベクトル \mathbf{r} の大きさの勾配を示せ。
- (3) $\mathbf{A} = (a_x, a_y, a_z)$ の時、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ と $\nabla \times \mathbf{A}$ を示せ。
- (4) 以下を確認せよ。

$$(a) \quad \nabla(\log r) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

$$(b) \quad \nabla \cdot \mathbf{r} = 3$$

$$(c) \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$$

$$(d) \quad \nabla \times \mathbf{r} = 0$$

$$(e) \quad \nabla \times (r^n \mathbf{r}) = 0$$

$$(f) \quad \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

- (5) 次のベクトル場は、図 5~10 のどれに対応するか分かるか?。ただし、分かりやすくするために、ベクトルの大きさはスケールされている。

$$(a) \quad \mathbf{A} = \left(0, \frac{1}{1+x^2}, 0 \right)$$

$$(b) \quad \mathbf{A} = (x, y, 0)$$

$$(c) \quad \mathbf{A} = (y, x, 0)$$

$$(d) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} (y, -x, 0)$$

$$(e) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{r} (y, -x, 0)$$

$$(f) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{r} (-x - y, x - y, 0)$$

- (6) 図 5~10 のうち、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ あるいは $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ のものはどれか?。まずは、計算をしないで考えよ。その後、計算を行い確認せよ。

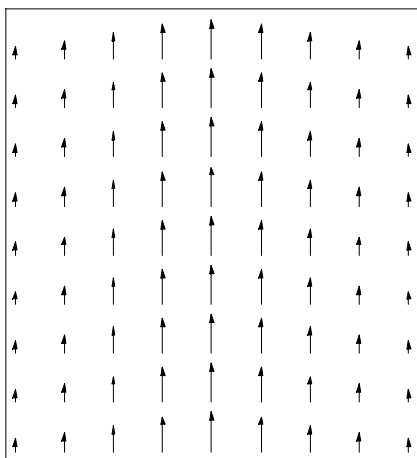


图 5:

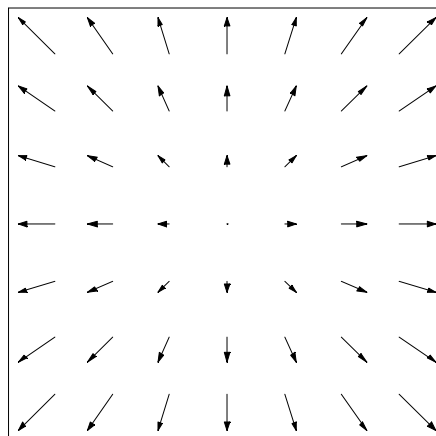


图 6:

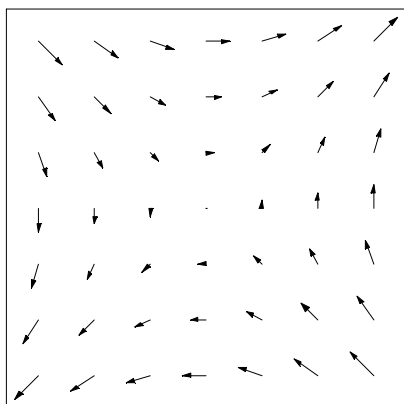


图 7:

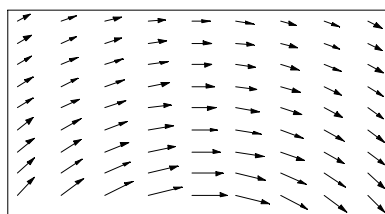


图 8:

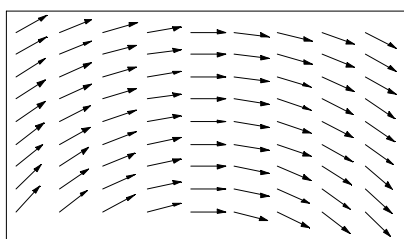


图 9:

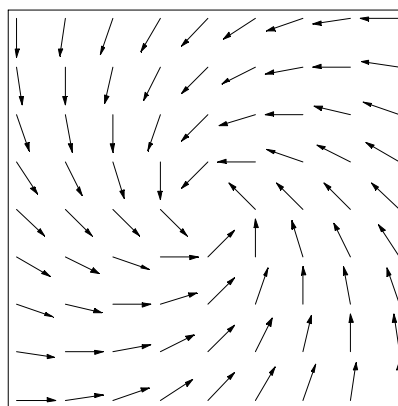


图 10: