

ベクトル解析のまとめ

山本昌志*

2004年5月14日

1 本日の講義内容

1.1 本日の講義内容

本日は、先週に引き続きベクトル場について、講義します。内容は、以下の通りです。

- ベクトルの演算
 - － ベクトルの和と積
 - － ラプラス演算子
 - － ベクトル場の2階微分
- ベクトル解析のまとめ
 - － 微分
 - － 積分
- 練習問題

2 ベクトルの演算

2.1 ベクトルの和と積

これについては、取り立てて、説明することは無いだろう。

*国立秋田工業高等専門学校 生産システム工学専攻

2.2 ラプラス演算子

ベクトル演算子同士の内積をとった結果、

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla &= \nabla^2 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}\tag{1}$$

の新しくできる演算子をラプラス演算子 (ラプラシアン) と言う。 ∇^2 の代わりに Δ と書くこともある。

これは、見て分かるようにスカラー演算子である。スカラー演算子であるため、スカラーやベクトルに作用することができる。スカラー場 ϕ に作用すると、次のようなスカラー場ができる。

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\end{aligned}\tag{2}$$

ベクトル場 \mathbf{h} に作用すると、次のようなベクトル場ができる。

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{h} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (h_x, h_y, h_z) \\ &= \left(\frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2} \right)\end{aligned}\tag{3}$$

2.3 ベクトル場の 2 階微分

以下の計算は、「ファインマン物理学 III 電磁気学」の第 2 章を参考にしている。

2.3.1 便利な公式

ベクトル場の 2 階微分はいろいろな場面で出くわす。自然科学を学習すると 2 階微分に非常に多く出くわす。これは、なぜなのだろうか? 不思議である。可能なベクトル場の 2 階微分は、

$$\nabla \cdot (\nabla T)\tag{4}$$

$$\nabla \times (\nabla T)\tag{5}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h})\tag{6}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h})\tag{7}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h})\tag{8}$$

である。

ベクトルの微分演算子 ∇ は、通常のベクトルの演算と同じように振舞う。この記号は非常に便利である。したがって、通常のベクトルの演算で 0 になるものを探し、その関係を利用して式 (4) ~ (8) の演算で 0 に

なるものを類推する。以下のベクトルの演算が 0 になることは直ちに分かる。

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A}T) = (\mathbf{A} \times \mathbf{A})T = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (10)$$

これらの関係から、

$$\nabla \times (\nabla T) = 0 \quad (11)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0 \quad (12)$$

と類推できる。類推ではあるが、これは正しい式である。最後の練習問題でこの式が正しいことを確認すること。

次にベクトル公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (13)$$

を用いた場合を考える。A と B を ∇ で置き換え、C を \mathbf{h} とすると、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h}(\nabla \cdot \nabla) \quad (14)$$

となる。右辺第 2 項の $\mathbf{h}(\nabla \cdot \nabla)$ が変である。この問題を避けるために、少し技巧的であるが、式 (15) を

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (15)$$

とすればよい。右辺第 2 項は、ベクトル C とスカラー $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ との積であるため、演算の順序を入れ替えても良い。こうすると、式 (16) は

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{h} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h} \quad (16)$$

となり、正しそうである。事実、これは正しい式である。成分ごとに、きちんと微分を行えば分かる。

以上で、最初に示した 2 階の微分のうち、式 (5) と (7)、(8) の公式を導いた。残りは、特に興味のあるものは無い。そこで、以上の結果をまとめると

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \text{スカラー場} \quad (17)$$

$$\nabla \times (\nabla T) = 0 \quad (18)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) = \text{ベクトル場} \quad (19)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0 \quad (20)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h} \quad (21)$$

$$(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{h} = \nabla^2 \mathbf{h} = \text{ベクトル場} \quad (22)$$

となる。

これまでの話をまとめると、ベクトル演算子 ∇ は通常のベクトルの演算規則が成り立ち、便利である。諸君は、これを上手に使えばよい。もし、その公式が気になるようであれば、成分に分けて、こつこつと微分を試してみれば良い。

2.3.2 落とし穴

先ほど、ベクトル演算子 ∇ は通常のベクトル演算と同様に扱えると述べたが、注意が必要である。例えば、通常のベクトル公式

$$(\mathbf{A}\psi) \times (\mathbf{A}\phi) = 0 \quad (23)$$

である。

- これがなぜ 0 になるか、図に示して説明せよ

もし、 \mathbf{A} を ∇ と置き換えると

$$(\nabla\psi) \times (\nabla\phi) = 0?????? \quad (24)$$

となる。ベクトル $\nabla\psi$ の方向は ψ に関係するし、 $\nabla\phi$ も同様である。したがって、0 になるのは特殊な場合である。

これは、次のように考える。最初の ∇ は ψ に作用し、つぎのものは ϕ に作用する。したがって、同じ ∇ でも異なるベクトルと考える。

だからと言って、 $\nabla \times \nabla\phi = 0$ が成り立たないというわけではない。この場合、2つの ∇ は同じ ϕ に作用する。

3 ベクトル解析まとめ

3.1 微分

3.1.1 微分演算子

ベクトル解析に使う記号 ∇ は、通常の微分の記号 d と同様の役割を果たす。要するに、 ∇ は微分のことで

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (25)$$

のことである。これは、微分の演算子であるが、これをベクトルとして取り扱った代数公式は全て成り立つ。非常に興味深いこととともに、便利である。

3.1.2 スカラー場の勾配

このベクトル演算子 ∇ を用いた、微分は 3 つある。ひとつは、勾配と呼ばれるもので、スカラー場に作用する。

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

これは、スカラー場 f に作用して、ベクトル場 ∇f を作っている。スカラー場 f の傾きを表している。 ∇f の代わりに、 $\text{grad } f$ と書かれる事もある。

3.1.3 ベクトル場の発散

次に、演算子 ∇ とベクトル場 A の内積 (スカラー積) である。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot A &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x, A_y, A_z) \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)\end{aligned}\tag{27}$$

ベクトル場 A に作用して、スカラー場 $\nabla \cdot A$ を作っている。この微分は

$$\nabla \cdot A = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int A \cdot n ds}{V}\tag{28}$$

と定義され、ベクトル場 A の発散と呼ばれるスカラー量を導くときに使われる。発散とは、湧き出しや吸い込みのことである。 $\nabla \cdot A$ の代わりに、 $\text{div } A$ と書かれる事もある。

3.1.4 ベクトル場の回転

最後に、演算子 ∇ とベクトル場 A の外積 (ベクトル積) である。

$$\begin{aligned}\nabla \times A &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}\end{aligned}\tag{29}$$

ベクトル場 A に作用して、ベクトル場 $\nabla \times A$ を作っている。この微分は

$$\nabla \times A = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int A \cdot d\ell}{S}\tag{30}$$

と定義され、ベクトル場 A の回転と呼ばれるベクトル量を導くときに使われる。 $\nabla \times A$ の代わりに、 $\text{rot } A$ や $\text{curl } A$ と書かれる事もある。

3.2 積分

3.2.1 スカラー場の勾配の線積分

座標 b から a を引いたスカラー場の差は、 a から b までの任意の曲線に沿ったスカラー場の接線成分の線積分に等しい。

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \nabla \phi \cdot d\ell\tag{31}$$

3.2.2 ベクトル場の発散の面積分

任意のベクトル場の任意の閉曲面の法線方向成分の面積分は、その面内の発散の体積分に等しい。

$$\int_{\text{閉曲面}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\text{内部}} \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (32)$$

これを、ガウスの定理と言う。

3.2.3 ベクトル場の回転の体積分

任意のベクトル場を任意の閉曲線に沿ってのその接線成分の線積分は、その面内の法線方向の面積分に等しい。

$$\int_{\text{境界}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{\text{面内}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (33)$$

これをストークスの定理と言う。

4 練習問題

[問題 1] 原点に電荷 Q がある。その電荷が作る電場 E のそれぞれの成分 (E_x, E_y, E_z) はどうなるか。発散はどうなるか?。ガウスの定理を応用してみよう。

[問題 2] z 軸に沿って I の電流が流れている。磁場 B のそれぞれの成分 (B_x, B_y, B_z) はどうなるか。回転はどうなるか?。ストークスの定理を応用してみよう。

[問題 3] 以下の関係を成分を計算することにより、証明せよ。

$$\nabla \times (\nabla T) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0$$

[問題 4] 三角形の各頂点を A,B,C とする。頂点 B から C に向かう斜辺をベクトルを a 、C から A をベクトル b 、A から B をベクトル c とする。ベクトル c を a と b で表せ。そして、その関係を用いて余弦定理を導け。

[問題 5] 中心の位置が r_0 、半径 a の球の表面を表す代数方程式を書け。ベクトルで書くとどうなるか?。ベクトルの式から、代数方程式を導け。