# ストークスの定理(その2)とスカラー場の勾配

山本昌志*

2004年5月7日

# 1 本日の講義内容

## 1.1 本日の講義内容

本日は、先週に引き続きベクトル場について、講義します。内容は、以下の通りです。

- ストークスの定理
- スカラー場の勾配

# 2 ベクトル場の回転とストークスの定理

## 2.1 ベクトル場の回転

### 2.1.1 大きな領域での話

完全流体の渦の速度は、半径に反比例する。

$$v = \frac{\Omega}{2\pi r} \tag{1}$$

ここで、$\Omega$ は渦の強さを表し、これがある位置が渦の中心である。そうして、渦が半時計回りの時、$\Omega \geq 0$ とする。これを取り囲むように積分を行うと、

$$\oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \Omega \tag{2}$$

となる。これは、これは渦の中心を取り囲んで、一回りすれば、積分の経路によらずいつも同じ値をとる。それは、次のように考える。渦の中心を中心に同心円の積分の値はいつも同じ、$\Omega$ になることは、簡単な計算で分かる。これが成り立つのは、流速 $\boldsymbol{v}$ が半径に反比例しているからである。ここで、図1のように、1周の $\Delta\theta/2\pi$ を考える。当然、$\Delta\theta$ は非常に小さいとする。この場合、同心円状の積分の一部である、線分1の積分は $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = vr\Delta\theta$ になるのは、直ちに分かる。次に、任意の積分経路の一部である線分2を考える。

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

$\Delta\theta$ が非常に小さいので、線分 2 の平均的な流速も $v$ になるであろう。線分の長さは $r\Delta\theta/\cos(\phi)$ となる。ただし、式 (2) の積分は内積となっているため、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} &= \frac{vr\Delta\theta}{\cos(\phi)} \cos(\phi) \\ &= vr\Delta\theta \end{aligned} \tag{3}$$

となる。したがって、線分 1 に沿っても、線分 2 に沿っても積分の値は同じである。このことから、どこのパスで積分しても値は同じことが理解できる。

これまでの話は渦であったが、電流と磁場は

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{4}$$

という関係があるので、同じことが言える。この式の左辺はベクトル、右辺はスカラーになっており矛盾しているが、今は細かいことを考えないこととする。後で、静磁場を学習するときに矛盾ない式を示すので我慢してほしい。磁場の式 (2) に対応するものは、

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I \tag{5}$$

となる。

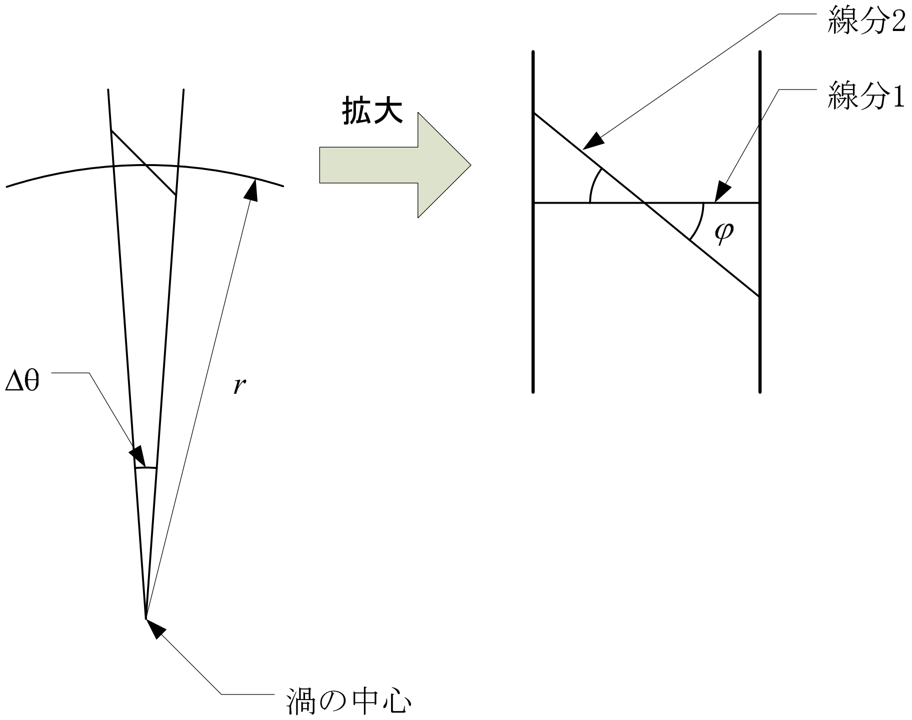


図 1: 積分範囲

### 2.1.2 微小領域での話

次に、教科書に従い、微小領域でベクトル場の回転を考える。ただし、教科書の表現は気に食わないので、少し図 2 のように変える。積分は、図の矢印に沿って一周、積分を行う。

まず、図の下の部分と上の部分の積分を考える。ただし、$\delta x$ と $\delta y$ が非常に小さいので、積分は積の和に置き換えられる。同じ x 座標で、上の部分と下の部分の積分は

$$\begin{aligned}\int_{\text{top,bottom}} &= v_x(x,y)\delta x - v_x(x,y+\delta y)\delta x \\ &\quad \text{テイラー展開して 1 次までとると (2 次以上を無視)} \\ &= \left[v_x(x,y) - v_x(x,y) - \frac{\partial v_x}{\partial y}\delta y\right]\delta x \\ &= -\frac{\partial v_x}{\partial y}\delta y \delta x\end{aligned} \tag{6}$$

となる。テイラー展開の 1 次まで計算し、2 次以降の高次を無視するのは常套手段でよく覚えておく必要がある。同様に、左右の積分は、

$$\int_{\text{left,right}} = \frac{\partial v_y}{\partial x}\delta x \delta y \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

となる。この上下の積分と左右の積分を足し合わせて、一周の積分とする。それは、

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{\partial v_x}{\partial y}\delta y\delta x + \frac{\partial v_y}{\partial x}\delta x\delta y \\ &= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\delta S\end{aligned} \tag{9}$$

となる。この式の右辺の括弧内は、まさに応用解析で学習したベクトル場の回転である。すなわち、

$$\begin{cases} (\nabla\times\boldsymbol{v})_x = \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ (\nabla\times\boldsymbol{v})_y = \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ (\nabla\times\boldsymbol{v})_z = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{cases} \tag{10}$$

である。したがって、微小区間の積分は、

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{11}$$

と書き改めることができる。この積分の値は、微小領域 $\delta S = \delta x\delta y$ の含まれる渦に等しくなる。式で表すと、

$$\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = \Omega \tag{12}$$

となる。次に渦の密度 $\boldsymbol{\omega}$ を次式より

$$\Omega = \delta\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{13}$$

定義する。すると、

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \tag{14}$$

という関係が導かれる。要するにベクトル場を微分 ($\nabla\times$) すれば、その部分の渦の中心の密度が得られるわけである。これと、同じ関係

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} \tag{15}$$

が磁場と電流にもある。ここで $\boldsymbol{i}$ は電流の密度である。この式の言っていることは、磁場 (ベクトル場) を微分 ($\nabla\times$) すれば、その部分の電流の密度が得られるわけである。これは、電流が渦の中心、磁場が流体の速度と同じ関係になっているからである。

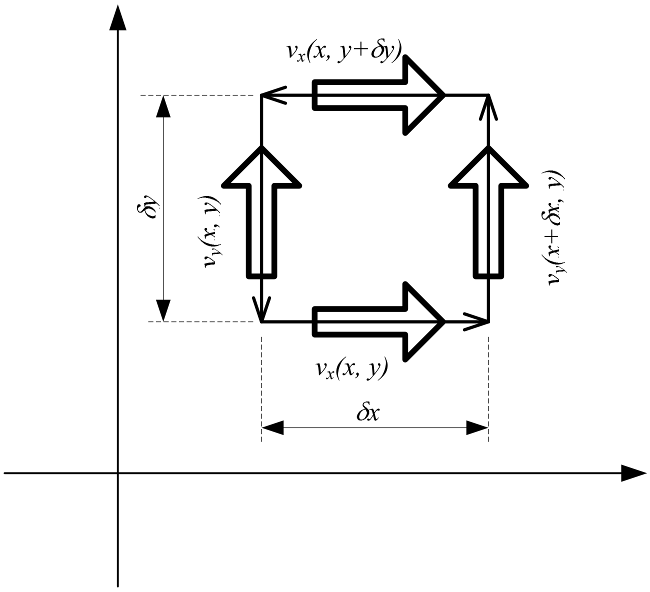


図 2: 微小領域での回転

#### 2.1.3　ストークスの定理

先ほどの $\nabla \times \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$ は、微小区間の回転であった。それを教科書の図 2.7 のように足し合わせると、隣同士の同じ積分領域はキャンセルされるので、

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{16}$$

という関係が得られる。これをストークスの定理という。

このストークスの定理から、

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I \tag{17}$$

が得られる。この式が言っていることは、ある閉じた領域で一周にわたり磁場を積分すれば、電流が分かるということである。

# 3 スカラー場の勾配

これまで、ベクトル場の微分として、発散 ($\nabla\cdot$) と回転 ($\nabla\times$) を示した。残りは、スカラー場の勾配を説明する必要がある。2 次元のスカラー場として、山の高さ $f(x, y)$ がある。経度 $x$ と緯度 $y$ が決まれば、山の高さが決まるような場合である。ただし、実際の地理では地上の凹凸が滑らか (微分可能) でない場合もしばしば有るがここではそれは考えない。図 3 のような等高線で山の高さを表すことにする。

$(x, y)$ の位置から $(x + dx, y + dy)$ へ移動したときの、山の高さの変化 $df$ は、

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (dx, dy) \end{aligned} \tag{18}$$

となる。このときの演算

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{19}$$

を勾配と言う。要するにスカラー場にナブラ演算子を作用させること。実際は、3 次元の場合が多く、普通は

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{20}$$

と書かれる。

- 図 3 で $\nabla f$ が最大の点はどこか?
- 図 3 で $\nabla f$ が最小の点はどこか?

# 4 コーヒーブレイク

ガウスの定理とストークスの定理の名前の経緯について、簡単に紹介しておく。以降の話は、数学セミナー 2003 年 7 月号を参考にしている (ほとんど同じ)。

ガウスの定理のガウスは、あの高名な代数学者ガウスである。しかし、ガウスが見出したものは式 (**??**) の特殊な場合であったらしい。式 (**??**) を最初に見出したのは、オストログラツキー (Mikahail Vasilevich Ostrogradski, 1881-1862) である。ということで、ロシアではガウス-オストログラツキーの定理と呼ばれることもある。

一方、ストークスの定理、式 (16) の発見者は、高名な物理学者のトムソン (William Thomson, 1824-1907、後に貴族、ケルビン卿となった) である。彼がケンブリッジに向かう列車の中で、この定理を思いつき、それをストークスの手紙に書いたということである。ストークスは、この定理をケンブリッジ大学の試験問題に出し、以降ストークスの定理と呼ばれるようになった。

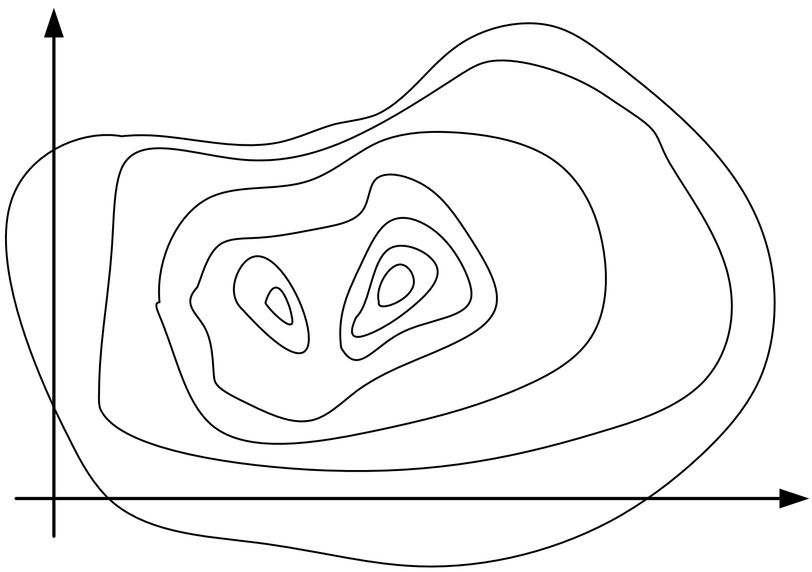

図 3: 等高線地図