ベクトル場(その2)

山本昌志*

2004年4月30日

1 本日の講義内容

1.1 本日の講義内容

本日は、先週に引き続きベクトル場について、講義します。内容は、以下の通りです。

- 先週の復習
- ベクトル場の回転

2 先週の復習(ベクトル場の発散)

2.1 ベクトル場の発散とクーロンの法則

2.1.1 大きな領域での話

先週は教科書の沿って、ガウスの法則を説明した。その骨子は、湧き出しのある水の流れを考えることであった。それは、原点に水の湧き出しがあり、3次元空間に水が満たされている場合を考えた。ここで、議論する空間は等方的と仮定するので、立体角 4π[sr] に等しく湧き出しから流出している。

単位時間あたり質量 M の湧き出しがある場合を考える。Δt の時間の湧き出しと、それを含むある閉じた面からの流出量は等しいので、

$$\begin{aligned} M\Delta t &= d\Delta V \\ &= d\Delta t\int \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} \end{aligned} \tag{1}$$

が成り立つ。ここで、d は水の密度、ΔV は湧き出しを含む任意の閉じた面での Δt 時間あたりの流出体積、最後はその面での積分である。この式は、閉じていれば任意の形の面で成り立つのは明らかであろう。これは、非圧縮性流体の質量保存則に他ならない。この式は、両辺に Δt があり、厄介なので、

$$M = d\int \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2}$$

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

としておく。

これは、任意の形で成り立つので、湧き出しがある原点を中心とした。半径 r の球面を考える。この場合、半径 r での速度の大きさは全て同じで、その方向は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ なので積分は容易に実行でき、式 (2) は

$$M = dv \times 4\pi r^2 \tag{3}$$

となる。これから、速度は

$$v = \frac{M}{4\pi d r^2} \tag{4}$$

となる。速度はベクトルなので、もう少し丁寧に書くと、

$$\boldsymbol{v} = \frac{M}{4\pi d r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{5}$$

となる。この式は、以前見たクーロンの法則から導かれる電場の式

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{6}$$

と全く同じ形をしている。すなわち、距離の逆 2 乗則である。

同じ形の式は、全く同じ内容を含む。このことは極めて重要で、諸君は生涯忘れてはならない。したがって、式 (2) に対応するクーロンの法則は、

$$Q = \varepsilon \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{7}$$

となる。クーロンの法則は、教科書の式 (1.1) のように書いても良いし、ここの式 (6) でも良いし、式 (7) でも良い。記述の仕方が違うだけで、どれも同じ内容である。全て、電場 (力) の大きさは距離の逆 2 乗に比例すると言っている。その方向についても、3 つの式は同じ内容である。

2.1.2 微小領域での話

次に、微小領域での水の流れ (ベクトル場 $\boldsymbol{v}$) の話をした。微小領域 $\delta x \times \delta y \times \delta z$ での流速ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ と湧き出しの関係について説明した。この微小領域に、M という湧き出しがある。その場合、式 (2) に対応するものは

$$\begin{aligned} M &= d\left[\{v_x(\delta x, 0, 0) - v_x(0,0,0)\}\delta y\delta z + \{v_x(0, \delta y, 0) - v_x(0,0,0)\}\delta z\delta x + \{v_x(0,0,\delta z) - v_x(0,0,0)\}\delta x\delta y\right] \\ &= d\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z \end{aligned} \tag{8}$$

である。無論、この式は $\delta x \to 0$ の極限でのみ正確なのは言うまでも無い。この式の右辺の微分については、諸君は学習済みで発散 (divergence) と呼ばれる量で、

$$M = d\nabla \cdot \boldsymbol{v}\delta x\delta y\delta z \tag{9}$$

と書くことができることは知っているだろう。$\delta x\delta y\delta z$ は微小領域の体積である。単位堆積あたりの湧き出しを m と書くと、

$$m = d\nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{10}$$

と書き直すことができる。ここで、m は単位体積あたりの湧き出しを示すスカラー場である。先も言ったように、流体の流れの式とクーロンの法則の式は同じなので、この式に対応するクーロンの法則もある。それは、

$$\rho = \varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{E} \tag{11}$$

である。ρ は単位体積あたりの電荷量、すなわち電荷密度でありスカラー場である。この式も、クーロンの法則である。いろいろとクーロンの法則は書き方があるが、この書き方が最も簡単で私は好きである。この式が示す物理的内容はクーロンの法則そのものであるが、この式はガウスの法則と呼ばれている。私は理由は知らない。

2.1.3 ガウスの発散定理

式 (11) を体積積分してみよう。左辺は、電荷密度の体積積分であるから、その中の電荷量の総和 Q に相当する。したがって、

$$Q = \varepsilon \int \nabla \cdot \boldsymbol{E} dv \tag{12}$$

である。

この式の右辺は、発散の積分である。小さい領域を流量の出入りを足し合わせている。隣り合う領域では、同じ境界面を共有し、その出入りの総和はゼロである。したがって、全体の積分は、その体積の表面での出入りの総和に他ならない。式であらわすと、

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{v} dv = \int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{13}$$

である。これもおなじみのガウスの発散定理である。したがって、

$$Q = \varepsilon \int \nabla \cdot \boldsymbol{E} dv = \varepsilon \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{14}$$

となる。実際、いろいろな式が出てきたが、憶えておくべき式は、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{15}$$

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{E} dv = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{16}$$

の 2 つである。最初の式は 4 つある Maxwell の方程式の一つで、2 つめのものはガウスの発散定理である。

2.2 先週の補足

式 (8) の求め方に疑問を持つ人がいるであろう。もう少し一般的にしよう。yz 平面での速度ベクトル v_x の差は

$$\begin{aligned} \delta v_x &= v_x(x+\delta x, y+\delta y/2, z+\delta z/2) - v_x(x, y+\delta y/2, z+\delta z/2) \\ &= v_x(x,y,z) + \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\delta y}{2} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\delta z}{2} - v_x(x,y,z) - \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\delta y}{2} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\delta z}{2} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x \end{aligned} \tag{17}$$

となる。これと同じ事を、zx 面と xy 面で行い、全ての面を足し合わせれば、式 (8) と同じ結果が得られる。